

量の理論-現在・過去・未来

水谷雅志 mizutani@aoni.waseda.jp

早大理工総研 招聘研究員&日大，芝浦工大，早大非常勤講師
日本物理学会第 78 回年次大会，「大学の物理教育」投稿準備中

2026 年 1 月 11 日

目次

はじめに

新学習指導要領と新検定教科書

新学習指導要領

新検定教科書

歴史的・概念的背景

まとめと展望

参考文献

補足

量の理論

量の理論から実数論へ

はじめに

- ▶ 自己紹介：
 - ▶ 岡崎市生まれ，名古屋市育ち．元ラジオ少年．高校で川勝博先生に学び，浪人を経て早大へ．そのころ「量の理論」に出会う．電子通信科から応用物理に転科し，高エネルギー研究室（並木・大場研）へ（ハドロン物理，確率過程量子化など）．OD 時の病による長期のブランクを経て現在．
- ▶ 物理学：物理量（以下，「量」と表現）を定義し，量の間関係性を探っていく学問．⇒量は物理学（定量的科学）の言葉．
- ▶ 量の性質と取り扱いのルール（@国際文書）
 1. 離散量（可算量）と連続量（不可算量，測定量）．
 2. 量が多い少ない（離散量），大きい小さい（連続量）が比較可．
 3. 同種の量のみが加減可．
 4. 量（連続量）はその大きさの基準（単位）を定め，単位の何倍かで測られ，「数値 × 単位」と表現．（Maxwell(1871,1873)[1, 2]）．
 5. 量の関係式の両辺の単位（物理次元）は等しい．
 6. 量の値の計算では「数値 × 単位」を代入して四則演算&微積分演算（quantity calculus-A.Lodge(1888)[3],J.Wallot(1926)[4]）．
- ▶ 日本の中・高等教育でこれらが系統的に教えられてなかった．

▶ 量の表記法 (国際文書の例)

IUPAP(国際純粋応用物理学連合) red book (1987)[5]

For a physical quantity symbolized by q , this relationship is represented in the form

$$q = \{q\} \cdot [q]$$

where $\{q\}$ stands for the numerical value of q and $[q]$ stands for the unit of q ¹. Neither the name nor the symbol for a physical quantity should imply any particular choice of unit.

(e.g. $x = 8.0 \text{ m} = 8.0 \times \text{m}$, $\{x\} = 8.0$, $[x] = \text{m}$)

SI 文書 第9版 2019 日本語版 [6]

物理量の値は一般に 数値と単位の積として表される。単位は単にある量の特定の例であり、基準として使われる。数値はその単位に対する量の値の比である。

¹この表記法は Maxwell(1873)[2] で導入された。

▶ 量の計算法 (国際文書の例)

quantity calculus[7, 8, 9, 10, 11, 12]

At time, $t_1 = 2.0\text{ s}$ and $t_2 = 4.0\text{ s}$, if the position of the object is $x_1 = 4.0\text{ m}$ and $x_2 = 8.0\text{ m}$, the velocity v is

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{8.0\text{ m} - 4.0\text{ m}}{4.0\text{ s} - 2.0\text{ s}} = \frac{(8.0 - 4.0)\text{ m}}{(4.0 - 2.0)\text{ s}} = \frac{4.0\text{ m}}{2.0\text{ s}} = 2.0\text{ m/s} \quad (1)$$

- ▶ これらはプロ (大学教員) でも中々受け入れられない。
「正式な表記法とは？」「こんな面倒なことをするんですか？」「1分1秒を争う入学試験対策には不適。」「細かい話しはどうでも良い。」「(SI) 単位なんか気にしない。」
- ▶ 高校教科書の量の表記が国際標準に従っていないのは、著者である高校教師や売り上げ重視？ の教科書会社のせい (佐々田 (2022)[13])？

▶ 我が国の例

教科書，専門書，学生レポート，ブルーバックスなど

速度 v [m/s] は時刻 $t_1 = 2.0$ [s]， t_2 [s] = 4.0 [s] の時，位置 $x_1 = 4.0$ [m]， x_2 [m] = 8.0[m] ならば，

$$v[\text{m/s}] = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{8.0 - 4.0}{4.0 - 2.0} = 2.0[\text{m/s}] \quad (2)$$

$$\lambda[\mu\text{m}] \simeq \frac{1.24}{E[\text{eV}]} \Rightarrow \lambda/\mu\text{m} \simeq \frac{1.24}{E/\text{eV}} \quad (3)$$

$$k_y = \frac{2\pi}{17[\text{m}]} = 2\pi \times \frac{2}{34[\text{m}]} \Rightarrow k_y = \frac{2\pi}{17\text{ m}} = 2\pi \times \frac{2}{34\text{ m}} \quad (4)$$

- ▶ v [m/s] : v の単位は m/s である. [] は全角入力でのみ可.
- ▶ $t_1 = 2.0$ [s] の [] 意味は?. t_1 は数値のみを表すから，単位を [] で囲んで付け足す? [] は [] の変種? かつて，ある意図で単位を [] で囲んで使用した検定教科書が存在 (後述).
- ▶ 式 (2) の第 2 等号の右辺に単位が省略されて「量 = 数値」. 両辺の次元の不一致.

新学習指導要領

- ▶ 今回（2022年度から）の学習指導要領改訂のための国立教育政策研究所による予備調査報告書から（教育政策研（2017）[14]）

平成 27(2015) 年度高等学校学習指導要領実施状況調査報告書（物理基礎 結果のポイント）

- ▶ 単位まで含めて物理量を捉え、定量的に扱うことに課題があると考えられる。
- ▶ 平成 25 年度中学校学習指導要領状況調査報告書（理科 結果のポイント）にも定量的なデータを分析することに課題あり。
- ▶ これらの調査結果が今回の学習指導要領改訂に反映（新田（2022）[?]）。

新検定教科書

- ▶ 平成 27(2015) 年度高等学校学習指導要領実施状況調査報告書「**単位まで含めて物理量を捉え、定量的に扱うことに課題.**」(平成 27 年)[14]
- ▶ 2022 年 物理基礎 (令和 3 年検定版)
全ての検定教科書に物理量の表記と測定法についての章.
 - ▶ 量の計算の解説あり，啓林館，東京書籍のみ全ページで採用.
- ▶ 2022 年 化学基礎 (令和 3 年検定版)
5 社全て全ページで国際標準の表記法と計算法を採用.
 - ▶ **物理基礎の教科書より先行.**
- ▶ 2021 年 中学理科 (令和 2 年検定版)
巻末に国際標準の表記法と計算法の紹介.
例：電圧 = $20\ \Omega \times 0.3\ \text{A} = 6\ \text{V}$. cf. 数学では 例：xm
- ▶ 旧学習指導要領の中間改訂版 (高校：2016，中学：2015)
国際標準の量の表記と量の計算法を既に採用.
 - ▶ **水谷担当の早大基幹理工 1 年の力学・電磁気学履修者で量の表記法を入学前に学んだ者：2018 年 3 割⇒ 2024 年 5 割. 他校ではほぼ 0.**

▶ 過去の検定教科書の2種類の例

物理 B 実教出版 昭和 41 年 (1966) 検定版 [15] 野上, 今井ら
量を文字であらわすときには, 次のような 2 通りの表し方がある.

(a) 文字が単位まで含めた物理量を表す場合

たとえば $g = 9.8 \text{ m/s}^2$, $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$ など

(b) 文字が単位を含めない数値だけをあらわす場合

例 - 面積 $S \text{ m}^2$, 温度 t° など

中略 この教科書ではおもに (a) の方法によったが, (b) の扱いを
したいときはまぎらわしいので, 'をつけて区別した. たとえば,
 $S = S' \text{ m}^2$

物理 B 大原出版 昭和 41 年 (1966) 検定版 [17] 朝永, 宮島ら

この章では電気と磁気について学ぶ. 電磁気的な量は, MKSA 単
位系と呼ぶ単位系を用いてはかられる. (中略) 電磁気的な量は種
類が多く, これらの量の間になり立つ関係式も複雑である. そこ
でこの章からは物理量の単位にはすべて [] をつけて示し, その
構成関係を明らかにすることにする. 例: $1[\text{C}]$, $1[\text{V/m}]$, $1[\text{N/C}]$
⇒次期検定版から上記の但し書きは消え, 全ての章で [単位] に.

- ▶ 水谷は高校・浪人時代(1970年代)に「量の理論」を知る。
 - ▶ 「物理I改訂版 実教出版 昭和51年(1976)検定版[18]」, 「川勝先生の物理授業(上) 海鳴社(1997)[19]」, 「高校課程 物理 新版 原島鮮著 裳華房(1976), 全訂版(1994)[20]」. 「英数国の要点 土師政雄著? Z会(1977)[21]」, 「特ゼミ 坂間の物理 坂間勇著 旺文社(2001)[22]」など.
- ▶ 「線型代数 小島順著 NHK出版(1976)[23]」での「量の理論」提唱を契機に1970年代半ばから1980年代前半に「数学セミナー」誌上で議論. 検定教科書からは消え, 忘却へ.
- ▶ 欧米での量の表記と量の計算の日本の公教育への導入は, 西洋数学を輸入した藤澤利喜太郎(高木貞治の師)が官製算数・数学教科書から「量」を追放して以来(遠山啓(1979)[24]).
- ▶ 残る課題
 - ▶ プロの抵抗, 様々な大学1年生の現状.
 - ▶ 揺り戻しの危険性: 新学習指導要領は「詰め込みすぎだ」.
 - ▶ 生徒学生の理解度に応じた工夫が必要.
 - ▶ 大学入試問題で正しく扱う必要あり.
 - ▶ 大学初学年にどのように教えるか? ⇒実数の連続性は量の連続性から. 連続量を測定することから議論を始め, 有効数字, 測定の不確かさへ(現在, 試行錯誤中).

歴史的・概念的背景

J.C.Maxwell, 1873[2]-On the measurement of quantities

Every expression of a Quantity consists of two factors or components. One of these is the name of certain known quantity of the same kind as the quantity to be expressed, which is taken as a standard of reference. The other component is the number of times the standard is to be taken in order to make up the required quantity. The standard quantity is technically called the Unit, and the number is called the Numerical Value of the quantity.

- ▶ 「"Theory of Heat" J.C.Maxwell (1871)[1]」の Chapt.IV でも量の表記法と単位系を議論。
- ▶ その後、Helmholtz(1887)[25]の議論を経て、A.Lodge(1888)[3]が量の計算 (quantity calculus) を導入し、Wallot(1926)[4]に至って完成 (de Boer(1995)[26])。
- ▶ これはマクスウェルの独創？ 発想の起源は？

- ▶ その発想はユークリッド「原論」[27]にまで遡る。
- ▶ 「原論」は幾何学の本とされるが、全体の3分の1近くの分量を占めるV巻(比例論)とX巻(通約不能量論)で、デデキントの「実数論」に匹敵する理論が展開。
- ▶ 当時は「数」個数を表す2から始まる自然数のみ。負数は無し。「有理数」は「線分」の比(V巻)、一部の「無理数」も「線分」の比で(X巻)表現。分数・小数の表記法は無し。
- ▶ 分数の表記はアラビアより、小数の表記はステヴィン(16C)による、負数の自由な使用はニュートン(17C)から。
- ▶ 「数は量の比」という考え方はオイラー(18C)まで。コーシー(18,9C)が数と量を区別なく自由に。
- ▶ 19C前半、ハミルトン、グラスマンらが数を量から独立させ、単なる記号へ。具象物からの独立と普遍性へ。
- ▶ 19C後半にカントル、デデキント(1872)[28]らにより「実数論」が完成。数は完全に量から分離。以降、公理的定義をノイマンが完成。
- ▶ 西洋数学は数と量の統合の歴史(以上、足立恒雄(2010,2011)[29, 30])。

- ▶ マクスウェルの量の表記法はその頃 (1871,1873)[1, 2].
- ▶ イギリスでは19Cまで「ユークリッドの原論」は中学校の教科書(ルイス・キャロル(V巻1874,I,II巻1883)[31]).
- ▶ マクスウェルは何らかの影響を受け、逆に量から分離された実数を用いて量を表す方法を提示(先の Theory of Heat には別の文脈でユークリッドへの言及あり).
- ▶ 日本はその頃、和算を捨て西洋数学、西洋科学を輸入し、藤澤利喜太郎が官製算数・数学教科書から量を追放.
- ▶ 当時の数学界の趨勢からは妥当だが、科学にとっては不幸?

森総之助 (1916)[32][33]-最新物理学精義

物理量を測定するとは之と同種の一定量を単位 Unit として興へられたる物理量が単位量を含む数を求むるに在り、此数を其物理量の数値 Numerical value と云ふ。(中略)一般に或る物理量を Q とし、 $[q]$ を其単位量、 n 数値とすれば $Q = n[q]$ (改行) 斯くの如く物理量を示す数値の次には必ず単位量を併記するを要す。

⇒定着せず。[単位]のルーツか？

- ▶ 高木貞治は『新撰算術講義』(1904)[34]で「量」から「実数」を構成する「量の理論」を展開. \Rightarrow 「解析概論」(1934)[35], 「数の概念」(1949)[37]などでは「量」を削除.
- ▶ 「量の理論」はその後, 南雲道夫(1942)[38], 小島順(1974)[23], 田村二郎(1978)[39]らによって同種の量の間線型構造が確認され(量の線型空間), 組立量は「量の空間のテンソル積」で表される事が示された. 日本独自の理論展開(足立(2011)[30]).

量の空間の現代的定義(高木貞治 [34, 36] 小島順 [23])

1次元実ベクトル空間 X の一つの元 $\vec{e} \neq 0$ をとって,

$$X = \{\alpha \vec{e} \mid \alpha \in R, \alpha > 0\} \quad (5)$$

と表せるとき X は「量の空間」という. \vec{e} を単位の量という.

- ▶ 高木貞治は X の要素 \vec{e} を一つとって, X の任意の量 \vec{a} が上式の形に一意に表される事を示した [34, 36]. 小島順 [23] は組立量が量の空間のテンソル積で表せることを示した(例: 長さの空間 L と長さの空間 L のテンソル積 $L \otimes L$ は面積の空間.)(谷村(2019)[40]).

- ▶ 東洋では数の表記法は西洋に先行.
 - ▶ インドでの「0」の発見. 紀元前後の中国最古の数学書 (九条算術) で, 10 進法と小数の使用, 負数の計算の完全な理解.
- ▶ 原論: 証明する数学 ⇔ 九条算術, 和算: 計算する数学
⇒ 東洋に科学が生まれなかった遠因?
- ▶ 西洋では「数」と「量」を区別するのに, なぜ日本では曖昧?
- ▶ 日本語 (中国語も) では離散量に「助数詞」をつけて数える.
「助数詞」をあたかも「単位」のように扱う.
例: 1 コ, 1 本, 1 グラム, 1 キロ (グラム), 1 キロ (メートル)
⇒ 西洋と東洋との世界の捉え方, 認知の仕方の違い.
- ▶ 人間の脳
 - ▶ 直観的・感情的に無意識に素早く判断する古い脳と言われる領域 (システム 1)
 - ▶ 論理的・抽象的に意識的にゆっくり思考する新しい脳と言われる領域 (システム 2)
- ▶ 人間の脳の働きには意識的な働きの背後に無意識な働きが大きく支配 (カーネマン (2012)[41]).

- ▶ 認知言語学に基づく英語文法における説明

可算名詞と不可算名詞 (今井隆夫 (2010)[42])

- ▶ 可算名詞：区切りがあり，分割不可能．内部は不均質．数の増加は要複製．
- ▶ 不可算名詞：区切りはなく，分割可能．内部は均質．伸縮自在．
- ▶ 上記の分類は英語非話者である日本人には難．英語話者にとっては容易かつ明確．両者の無意識な世界の捉え方，認知の仕方の違い (今井むつみ (1997,2010)[43, 44])．
- ▶ 上記の分類はほぼ離散量と連続量の分類に対応．
- ▶ これは日本人が離散量と連続量の区別ができないというわけではなく，無意識レベルで日常的に行っていないことを示唆．
- ▶ 科学を学んだり，教えたりする上でそのことへの理解は必要なのでは？
- ▶ 日本人の科学リテラシー向上のためにも大切なこと．

まとめと展望

▶ まとめ

- ▶ 国際標準の量の表記と量の計算が新学習指導要領および文科省新検定教科書に正式に取り入れられた。
- ▶ その普及にはまだ道半ばだが、徐々に普及の兆しが。
- ▶ 量の表記法と計算法の歴史的背景と概念的背景について。

▶ 展望

- ▶ 実数の連続性の議論の背景に量を測る（数値化する）ことに置く可能性は？
⇒有効数字や不確かさの議論へ。
- ▶ 電磁気学の単位系の整備 (佐藤, 北野 (2018)[10]).
 - ▶ 一応, MKSA 単位系 (4 元単位系) (SI 単位系) となっているが, 未だに cgs ガウス単位系などの (3 元単位系) が残る。様々な混乱の元。実験: MKSA 系 vs 理論: cgs ガウス系, Heaviside-Lorentz 系
 - ▶ MKSA 単位系より VAMS 単位系 (今井功 (1989)[45]) の方が電磁気学の単位系としては相応しくかつ本質的。
 - ▶ ある物性実験家「cgs ガウス単位系は忌々しい。」
- ▶ 量子論的量の理論の構築へ (谷村 (2022[46])).

参考文献 I

- [1] J.C.Maxwell *Theory of Heat* McMillan (1871), Dover (2001)
- [2] J.C.Maxwell *A Treatise on Electricity and Magnetism Vol.1* Clarendon Press (1873), Dover edition (1954)
- [3] A.Lodge *Nature* 19 (1888) 281
- [4] J. Wallot *Dimensionen, Einheiten, Maßsysteme, Handbuch der Physik* II, Kapital I, Berlin, Springer, (1926) pp.1-41
- [5] IUPAP-RedBook: <http://iupap.org/wp-content/uploads/2014/05/A4.pdf>
- [6] SI-Brochure 9th.: <https://www.bipm.org/documents/20126/41483022/SI-Brochure-9-EN.pdf/2d2b50bf-f2b4-9661-f402-5f9d66e4b507>, 日本語版:
<https://unit.aist.go.jp/nmij/public/report/si-brochure/>
- [7] IUPAC-GreenBook: <https://iupac.org/wp-content/uploads/2015/07/Green-Book-PDF-Version-2011.pdf>.
和訳: https://www.nmij.jp/public/report/translation/IUPAC/iupac/iupac_green_book_jp.pdf.
- [8] NIST special publication 2008 ed. <https://nvlpubs.nist.gov/nist-pubs/Legacy/SP/nistspecialpublication811e2008.pdf>
- [9] ISO 80000-1 に基づく JIS Z 8000-1:
<https://kikakurui.com/z8/Z8000-1-2014-01.html>.
- [10] 佐藤文隆, 北野正雄 新 SI と電磁気学 岩波書店 (2018)

参考文献 II

- [11] 小牧研一郎, 大学の物理教育, **24** (2018) 117.
- [12] 水谷雅志 大学の物理教育 **3** (2019) 101.
- [13] 佐々田博之 物理教育 **77** (2022) 177
- [14] 国立教育政策研究所『平成 27 年度 高等学校学習指導要領実施状況調査報告書』
https://www.nier.go.jp/kaihatsu/shido_h27/h27/10h27bunseki_butsumiKiso.pdf
- [15] 野上茂吉郎他 編「物理 B」実教出版 (1966)
- [16] 野上茂吉郎他 編「物理」実教出版 (1959)
- [17] 朝永振一郎, 福田信之他 物理 B 大原出版 (1965)
- [18] 野上茂吉郎, 今井功, 木下是雄他 編「物理 I 改訂版」(1976)
- [19] 川勝博 川勝先生の物理授業 (上巻) 力学編 海鳴社 (1993)
- [20] 原島鮮 高校課程 物理 裳華房 (1975)
- [21] 英数国の要点 土師政雄著 Z 会 (1977)
- [22] 坂間勇 特ゼミ 坂間の物理 旺文社 (2001)
- [23] 小島順 線型代数 NHK 出版 (1974), <http://math.oshirase.com/>
- [24] 遠山啓 量の理論とは何か 太郎次郎社 (1979).

参考文献 III

- [25] H.v.Helmholtz '*Zahlen und Messen erkenntniss- theoretisch- betrachtet*, Leipzig, Wiss Abh. ID, (1887) 356-391.
- [26] J. de Boer, *Metrologia* **31** (1995) 405.
- [27] 斎藤憲, 三浦伸夫 訳, 解説『エウクレイデス全集 第1巻 原論 I-VI』東京大学出版会 (2008), 斎藤憲訳, 解説『同 第2巻 原論 VII-X』東京大学出版会 (2015)
- [28] デデキント『連続性と無理数』(1872)
- [29] 足立恒雄 数理研講究録 1677 (2010) 141.
- [30] 足立恒雄 数とは何か：そしてまた何であったか 共立出版 (2011)
- [31] ルイス・キャロル 細井勉 訳・注『ルイスキャロルのユークリッド論』日本評論社 (2016)
- [32] 森総之助 最新物理学精義 積善館 (1916)
- [33] 単位は語る 科学のツボ 森川鐵朗 技報堂出版 (2006)
- [34] 高木貞治 新式算術講義 博文館 (1904), ちくま学芸文庫 (2008)
- [35] 高木貞治 解析概論 岩波書店 (1934)
- [36] 高木貞治 数学雑談 共立出版 (1935)(「近世数学史談」と合本で復刊)
- [37] 高木貞治 数の概念 岩波書店 (1949)

参考文献 IV

- [38] M.Nagumo, Osaka,J.Math., (1977)(全国誌上数学談話会, 1942)
- [39] 田村二郎 量と数の理論 日本評論社 (1978)
- [40] 谷村省吾 幾何学から物理学へ サイエンス社 (2019)
- [41] ダニエル・カーネマン『ファスト&スロー』早川書房 (2012)
- [42] 今井隆夫『イメージで捉える感覚英文法 認知文法を参照した英語学習法』開拓社 (2010)
- [43] 今井むつみ『ことばの学習のパラドックス』共立出版 (1997), ちくま学芸文庫 (2024)
- [44] 今井むつみ『ことばと思考』岩波新書 (2010)
- [45] 今井功 電磁気学を考える サイエンス社 (1989),(2003)
- [46] 大抵の物理量は圏論的射である 数学セミナー 3月号 (2022)

補足

量の理論

(足立恒雄 (2011)[30])

- ▶ 高木貞治 (1875-1960) はその 3 作 (4 部作中) によってほぼ生涯にわたって、量の理論を詳細に論じている。その理由は：
 - ▶ 数は量を表すべく発展してきたという歴史的経緯。
 - ▶ 常識と学問とを連絡する。
- ▶ 西洋にも量の理論を詳細に論じた著作がほぼない状況で貴重な著作²。
- ▶ 実数は量から生まれたので、量の定義と実数の定義は並行的に可能。ただし、量は積について閉じていないので、体をなさない。量は 1 次元線形空間 (量の空間 [23]) をなす。
- ▶ テンソル積を定義すれば量の積は可能。これは、小島順によってなされた³。

²論文 [26] は例外と思われる

³小島順 (1974)[23], 谷村省吾 (2019)[40]

ここで扱う量とは連続量のこと。

量の古典的定義 1

対象となる全ての同種の量のなす集合を量の空間と呼び、 X と表す。

条件 1 どの 2 量も大小の比較ができる：

$A, B \in X$ とするとき

$$A < B, A = B, B < A \quad (6)$$

のいずれか一つだけが成り立ち、さらに任意の $A, B, C \in X$ に対して

$$A < B, B < C \implies A < C \quad (7)$$

が成り立つ。

量の古典的定義 2

条件 2 量の間には足し算ができる：

$A, B, C \in X$ に対して $A + B$ と書かれる X の要素があつて次が成り立つ：

$$A + B = B + A, A + (B + C) = (A + B) + C \quad (8)$$

条件 3 大小関係にある別の一定量を加えても大小関係は不変である：

$A, B, C \in X$ に対して

$$A < B \implies A + C < B + C \quad (9)$$

が成り立つ。

量の古典的定義 3

条件 4 量に別の量を加えると元の量より大きくなる：

$A, B \in X$ とすると $A < A + B$ が成り立つ。

条件 5 大きい量から小さい量を引くことができる：

$A < B$ ならば $B = A + C$ となる $C \in X$ が存在する。

条件 6 最小の量は存在しない：

$A \leq B$ が任意の B に対して成り立つような A は存在しない。

量の連続性は一見して

量の古典的定義 4

量の稠密性 2 つ量の間には必ずに別の量が存在する：

$A < B$ ならいつでも $A < C < B$ を満たす C が存在する。

これは有理量全体の集合でも満たされる。

量の連続性はデデキントによると切断を用いて定義される：

量の古典的定義 5

量の切断の定義 (デデキント) 量の空間 X を 2 つの部分集合 X_1 , X_2 (ただしどちらも空でない) に分けて, X_1 に属する要素は全て X_2 に属する要素よりも小さいとする:

$$1. \quad X = X_1 \cup X_2, \quad X_1 \neq \emptyset, X_2 \neq \emptyset \quad (10)$$

$$2. \quad A \in X_1, B \in X_2 \implies A < B \quad (11)$$

この時, ペア (X_1, X_2) を X の切断という.

量の古典的定義 6

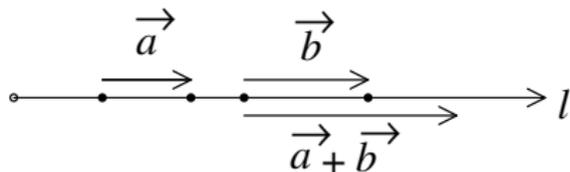
量の連続性

条件 7 量の大きさには切れ目がない：

(X_1, X_2) を X の切断とすると、その境目となる $M \in X$ が存在する。すなわち、 M は X_1 に属する最大の量であるか、 X_2 に属する最小の量であるか、の一方だけが成り立つ。

▶ 量の空間の具体例：

下図のような半直線上 l の右向きに線分 \vec{a} の全体 X を考える．スライドして一致する線分は同じものとみなす．大小関係はその長さで定義．



X が量の空間の条件 1 から 6 まで満たす事は直観的に明らか．条件 7 が成り立っていることは境目を持つ大きさを考えると明らか（ただし，その証明は複雑．）．

- ▶ 数学的対象以外の量の例：力，固体の質量や体積。
⇒ 条件 1 から 6 まで満たされるのは明らか．条件 7 は？
- ▶ 厳密に言えば，質量や体積は物質の構成要素（分子・原子）を単位に取れば満たされない．
- ▶ 一般的に現象世界では条件 7 は満たされない．その他の条件も満たされるかどうかは個々の場合による．
- ▶ 多くの場合はこれらの条件を「原理」と認めると，対象全体が「量の空間」となり，数学（解析学）が適用できる．
- ▶ その結果が，観測や実験で得られた結果と一致しないことになると，「原理」が捨てられ，新たな「原理」が模索される．
例：ニュートン力学と特殊相対論の関係

- ▶ 量の空間の定義と実数の定義は全く並行的．違いは，量の空間は積について閉じていないこと．
例：長さ \times 長さ = 広さ（面積）
- ▶ 現代の立場では実数を使って，逆に量を定義することになる．

量の空間の現代的定義（小島順 [23]）

1次元実ベクトル空間 V の一つの元 $\vec{e} \neq \vec{0}$ をとって，

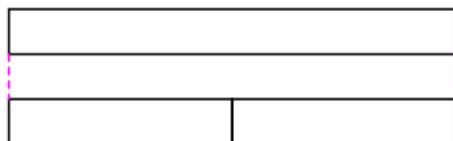
$$X = \{\alpha \vec{e} \mid \alpha \in R, \alpha > 0\} \quad (12)$$

と表せるとき X は「量の空間」という． \vec{e} を単位の量という．高木貞治は V を古典的な量の空間 X に置き換えて， X の要素 \vec{e} を一つとって， X の任意の量 \vec{a} が上式の形に一意に表される事を示した [36, 37]．

補足

量の理論から実数論へ

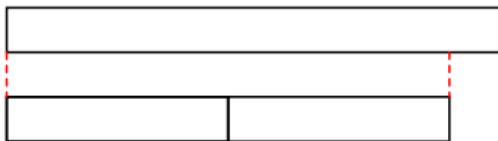
- ▶ 量の理論を大学授業で取り入れるにはどうすれば良いか？
- ▶ 1年生向けの力学，物理学実験での導入．
- ▶ 量（長さ）の測定と表記



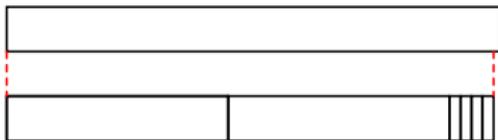
- ▶ 長さ L_1 を基準の長さ L_0 で測ると： $L_1 = 2 \times L_0$
 $L_0 = \text{m}$ とすれば⁴， $L_1 = 2 \times \text{m} = 2\text{m}$

⁴単位 (unit) とは大きさ 1 の基準量である

- ▶ 次に、



- ▶ 長さ $L_2 (> L_1)$ は基準の長さ L_0 では測れない。
残りを $\frac{1}{10} L_0$ で測る



- ▶ $L_2 > 2L_0 + 4\left(\frac{L_0}{10}\right) = 2.4 \text{ m}$
残りをさらに $\frac{1}{10^2} L_0$ で測る...
無限回測ることができれば,
 $L_2 = 2 \times \text{m} + 4 \times \frac{1}{10} \text{m} + 3 \times \frac{1}{10^2} \text{m} + \dots$ (実数の10進数表示)