

Bellの不等式の再考

(株)浜松クオantum 研究部 柳沢雄太郎

- 1 ベルの不等式とその後の多数の重要な実験により、量子論も一つの峠を越えましたが、アインシュタインが批判していた相対論と矛盾するように見える「遠隔作用」の問題は、なかなか解消されたように感じられません。

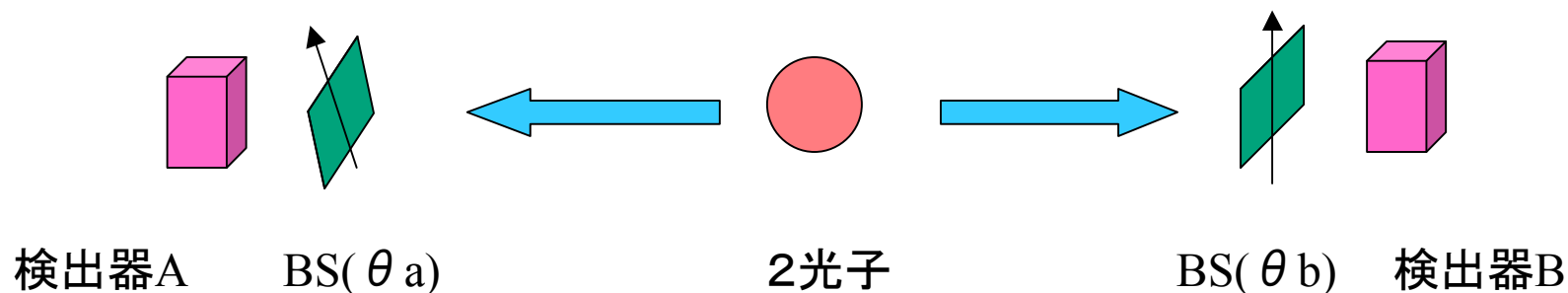
今までの多数の重要な実証実験は確立しましたが、その元は、ただ1つ、ベルの不等式の存在です。

そのため、再度、ベルの不等式を再考してみることも無意味ではないのではないのでしょうか。

2025/1/11 Quatuo研究会発表 (岡山大学)

2

Bellの不等式 実験Setup



光子の偏波状態を偏波ビームスプリッタ(BS)で計測,透過を測定値+1,反射を-1とする

左の光子の測定結果を $A(\theta a, \lambda)$ として、右の光子の測定結果を $B(\theta b, \lambda)$ とする。 ($\theta a, \theta b$ は、それぞれの測定角度、 λ は隠れた変数)

2つの光子の同時計測の平均値は、

$$C(\theta a, \theta b) = \int A(\theta a, \lambda) B(\theta b, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \text{ となる。}$$

$\rho(\lambda)$ は、 λ の確率分布を与える確率密度で、 $\int \rho(\lambda) d\lambda = 1$ とできる

3

ここで、 $A(\theta a, \lambda) = \pm 1$ より次の不等式が成立する。

$$|C(\theta a, \theta b) - C(\theta a, \theta' b)| \\ = \left| \int A(\theta a, \lambda) B(\theta b, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda - \int A(\theta a, \lambda) B(\theta' b, \lambda) \rho(\lambda) d\lambda \right| \quad (\text{式 1})$$

$$= \left| \int [A(\theta a, \lambda) B(\theta b, \lambda) - A(\theta a, \lambda) B(\theta' b, \lambda)] \rho(\lambda) d\lambda \right| \quad (\text{式 2})$$

$$\leq \int |A(\theta a, \lambda) B(\theta b, \lambda) - A(\theta a, \lambda) B(\theta' b, \lambda)| \rho(\lambda) d\lambda \quad (\text{式 3})$$

$$= \int |A(\theta a, \lambda) [B(\theta b, \lambda) - B(\theta' b, \lambda)]| \rho(\lambda) d\lambda$$

$$\leq \int |B(\theta b, \lambda) - B(\theta' b, \lambda)| \rho(\lambda) d\lambda$$

同様にして、

$$|C(\theta' a, \theta b) + C(\theta' a, \theta' b)| \leq \int |B(\theta b, \lambda) + B(\theta' b, \lambda)| \rho(\lambda) d\lambda$$

これから次のベルの不等式が得られる。

$$|C(\theta a, \theta b) - C(\theta a, \theta' b)| + |C(\theta' a, \theta b) + C(\theta' a, \theta' b)| \leq 2$$

4

問題は、変形 2 のように、 $A(\theta a, \lambda)$ を共通項として出すことができるかである。

左の測定器で $A(\theta a, \lambda)$ を測定した場合に、右の測定器で $B(\theta b, \lambda)$ を測定したとする。その時、右の測定器で $B(\theta b, \lambda)$ を測定したのであるが、全くことなる $\theta' b$ 方向を測定することも可能だったはずであり、もし測定したなら、ある値 $B(\theta' b, \lambda)$ という値を得ることができただろうから、式 1 から式 2 への変形も可能のように思われる。

しかし、検証実験のことを考えると疑問であることが分かる。すなわち、量子の計測というものは、 $B(\theta b, \lambda)$ と同時に $B(\theta' b, \lambda)$ を測定することは原理的に不可能であり、検証実験でも、そのような測定値をつかって式を分析をしていないのである。すなわち、検証実験では、1 実験ごとに計測できるのは、左右の a, b の位置においたある方向の A と B の値であり、何回か行った後の数値はその平均である、 $C(\theta a, \theta b)$ 、 $C(\theta a, \theta' b)$ 、 $C(\theta' a, \theta b)$ 、 $C(\theta' a, \theta' b)$ であり、これらの値を独立に測定して、ベルの不等式に代入しており、これは、式 1 までの変形しか使っていないのである。
実験では式 2 の状態の値を得ることはしていない。

隠れた変数 $\lambda_{i-1}, \dots, \lambda_{i-\varepsilon}, \lambda_i, \lambda_{i+\varepsilon}, \dots, \lambda_{i+1}$

実験 Setup-1

$A(\theta a)$

$B(\theta b)$

1
-1

1
-1

1
-1

実験 Setup-2

$A(\theta a)$

$B(\theta' b)$

-1
1

-1 -1 1

-1
1

予想

実験結果で分かることは○に限る

式の移行が可能な場合

- 1、 λ_i が有限
- 2、 $\rho(\lambda)$ が $\lambda + \varepsilon$ で実験結果が同一

不可能な場合

- 1、 λ が無限で $\lambda + \varepsilon$ でも結果が異なる
- 2、 λ と $\lambda + \varepsilon$ で同一となるためには $\varepsilon \sim 0$
で、ほとんど無限回数の実験が必要
(たとえば、 $\varepsilon \sim 10^{-100}$)

5

では、式1から式2へ変形できる場合はどのような場合であろうか。その場合は以下の場合が考えられる。 λ の値が有限個の場合 計測実験をするごとに、 λ の値はランダムに発生し、 λ の値は、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とすれば、各 λ_i ($i=1, 2, \dots, n$) ごとにまとめることで、式2への変形が可能である。

λ の値は無限であるが、適当な $\lambda = \lambda_i$ ($i=1, 2, \dots, \infty$) について、 $\lambda_i - \varepsilon_i$ と $\lambda_i + \varepsilon_i$ の間の λ にたいして、AやBの値が同一である場合 (クラス分け可能の場合)

ベルの不等式を導いた式2への変換では、以下の暗黙の仮定が存在する。すなわち、多数回の実験では、変数 λ 、または μ は分布関数 $\rho(\lambda)$ によって、同一または、極めて同一の分布をとるだろうという仮定、そして、 $\lambda = \lambda_1, \lambda_2, \dots$ 、または連続な λ のような場合でも、 $\lambda = \lambda_0$ の近傍の λ では、 $A(\theta, a, \lambda)$ の値は同じになるような近傍が存在するという仮定である。

もし、測定の実験ごとに、 λ_i は変化して、全実験をとうして一度も同じ値をとることがなくクラス分けができない場合は、A()でまとめることは不可能である。

6

次に式 2 への変形が不可能である場合を示す。

式 1 で、 $C(\theta a, \theta b)$ と $C(\theta a, \theta' b)$ の値を得るための実験は、全く別の一連の実験である。そのため、変数 λ と変数 μ の値が同一の領域をとることができるかが重要なこととなる。もし、偏向実験の 1 回ごとに、全くことなる変数 λ である場合は、当然、角度を少しかえた次の $C(\quad)$ の値を計測する変数 μ も値も全くことなるものとなり、 $C(\theta a, \theta b)$ と $C(\theta a, \theta' b)$ に共通する変数 $\lambda = \mu$ はないのであるから、式 2 への変形ができないことは明らかである。また、

2 のような場合で、 λ_i の近傍、 $\lambda_i \pm d \epsilon_i$ の値であった場合に、 $d \epsilon_i$ がどれほど小さくしても、 A や B の値が一気に変化し、ある時は $+1$ であったのが、 $d \epsilon_i$ を少し小さくしたら -1 になるような不安定な値の場合はどうだろうか。量子の世界が、このような無限集合の場合は、共通の A によるクラスわけによる式 2 の変形は不可能であり、ベルの不等式を導く前提がくずれるのである。量子実験は、1 実験ごとに、無限のパラメータ変数を持っている可能性があり、そのため、 $\rho(\lambda) d\lambda$ のような一種のクラス分けをすることが不可能な無限集合である場合は、ベルの不等式は、隠れた変数について何もいえないのである。

結論 Bellの論文に依存する多数の重要な実験結果の意味は、「常識的な性質をもつ隠れた変数」は存在しない」ということである



<https://h-quantum.com/Magazine/>

Magazine of Quantum Reality

「量子力学における波動関数による記述はアンサンブル(系の集団)による記述である

神はサイコロをふらない 」

Einstein

「(世間の考えは)アンデルセンの裸の王様のメルヒェンのように思われます」

Schrodinger

「最終的にはEinsteinが正しいことになると思います。量子力学の現在の形を最終的な
形と考えるべきではないからです」

Dirac (1975年)

「確率は無知な人間が創造したもの、自然は確率とは関係なく動いていく」

参照

J.S.Bell, Physics 1,195(1965)

A.Einstein,B.Podolsky,and N.Rosen Phys.Rev.47,777(1935)

井上恭, 工学系のための量子光学, 森北出版, 2008

アインシュタイン選集 1971-1972 共立出版 湯川秀樹監修

波動力学形成史 k. プルチプラム 江沢洋訳 より「1949年 シュレーディンガーから
ゾンマーフェルトに」手紙

ボーアとアインシュタインに量子を読む 山本義隆 2022年 みすず書房