力学の見どころ — 速度と運動量の双対性を中心に

北野 正雄

京都大学, 応用科学研究所, 大阪大学 QIQB

第 11 回 QUATUO 研究会@岡山大学
2025 年 1 月 11–12 日

(もくじ)

はじめに — 本の紹介

ライブラリ理学・工学系物理学講義ノート 佐藤文隆，北野正雄 (共編)
サイエンス社刊 (2017.3–)

- 「力学」2024 年 12 月 25 日 刊行
- サポートページに付録
  - 付録 A 単位系
  - 付録 B 双対構造
  - 付録 C Python コード

力学の見どころ

- (教養時代以来の) 力学を勉強し直して, いろいろな気づきがあった.
- 電磁気学も量子力学も力学をモデルにして構築されており復習の意味は大いにある.
- ここでは力学における「双対」について話をしたい.

(もくじ)

みなさんへの質問

線形代数学で「双対空間」を学びましたか？

双対空間の簡単な歴史

- 双対 (ベクトル) は関数空間 (無限次元) 上の汎関数として，その重要性が徐々に認識されるようになった (F. Riesz, 1909).

$$A[f] = \int_X f(x)\,\mathrm{d}\mu_A(x)$$

- 汎関数がなす線形空間の有用性　(e.g. 超関数 = 急減少関数の汎関数)
- しかし，有限次元では，“... before 1930 nobody had a correct conception of duality between finite dimensional vector spaces;” (by Dieudonne in History of Functional Analysis)
- 双対 (dual) という用語は Bourbaki による　($\sim$ 1938).

大学の「線形代数」で取り上げられる機会は少ない．「物理学」でも共通的普遍的概念としては扱われていない．

双対空間の定義

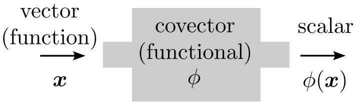
- 体 K ($\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ など) 上の線形空間 V に対して, V から K への線形写像 ϕ を考える.
  $$\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y), \ \ \phi(\alpha x) = \alpha\phi(x).$$
- 線形写像全体がつくる集合: V^*
- $\phi, \psi \in V^* \Rightarrow \phi + \psi \in V^*, \quad \alpha\phi \in V^*$, つまり, V^* は K 上の線形空間である. V の双対空間 (dual space) とよぶ.
- 双対空間の要素は双対ベクトル, コベクトル, 1 形式, 汎関数, ...
- $x \in V$, $\phi \in V^*$ に対して $\phi(x)$ を $\langle \phi, x\rangle$ と書き, 双対ペアリング, 内部積などとよぶ. テキストでは $\boldsymbol{\phi} \lrcorner \boldsymbol{x}$ と書いた.
- 有限次元の場合, $\dim V^* = \dim V$, $(V^*)^* \sim V$.
  (双対のゆえん.)

推しの双対が流行らない理由

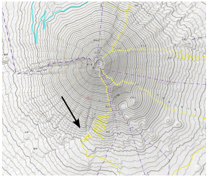
- イメージ・機能の多様性
- 内部積と内積が混同される. 実際, 後者で代用できる場合 (計量つき空間) も多い.
  — ユークリッド空間・デカルト座標に慣れすぎている
- 関数型プログラミング (Lisp ... Haskell) の敷居の高さに類似;
  「関数が first class object として変数と同様に使える.」
  「線形写像が線形空間の要素としてベクトルのように扱える.」
- ブラケットと内積の混同 — 折衷記法 $\langle \hat{A}\phi | \psi \rangle$
- Geometrical Algebra (GA) では双対を意識的に排除しているように思える.
- テンソル記法 (上下添字) に内包されてしまっている.

双対ベクトルのイメージ

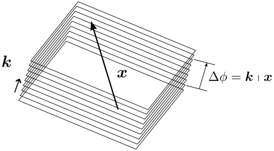
- 線形ブラックボックス



- 等高線・等圧線



- 波数ベクトル



双対ベクトル (コベクトル) の表現

- 線形ブラックボックス ϕ にベクトル $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{e}_1 + \cdots + x_n\boldsymbol{e}_n$ を入力;

$$
\begin{aligned}
\phi(\boldsymbol{x}) &= \phi(\boldsymbol{e}_1 x_1 + \cdots + \boldsymbol{e}_n x_n) \\
&= \phi(\boldsymbol{e}_1)\,x_1 + \cdots + \phi(\boldsymbol{e}_n)\,x_n \qquad\qquad p_i := \phi(\boldsymbol{e}_i) \\
&= p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n \\
&= \begin{bmatrix} p_1 & \ldots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad = \boldsymbol{p} \shortmid \boldsymbol{x}
\end{aligned}
$$

2 つのベクトルの内積と思わずに,
ヨコベクトルとタテベクトルの行列積と思う

(もくじ)

Dirac: The Principles of Quantum Mechanics

- 1930 1st edition (～ 27 歳)
  ベクトルを ψ, 反線形ベクトルを ϕ で表した.
- 1935 2nd edition
- Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **35**, 416 (1939)
  "A new notation for quantum mechanics"
- 1947 3rd edition ブラケット記法を採用
  $\psi \to |\psi\rangle$, $\phi \to \langle\psi|$
- 1958 4th edition
- 1967 Revised 4th edition

日本語版は第 2 版から.
仁科芳雄, 朝永振一郎, 小林稔, 玉木英彦 (訳): 「量子力学」 (岩波書店, 1942)
第 1 版翻訳中に原著第 2 版の完成の情報が著者から届く.

北野: 数理科学 1 月号 2025 年

Dirac は dual を知っていた！

- Whenever we have a set of vectors in any mathematical theoy, we can always set up a second set of vectors, which mathematicians call the dual vectors. (Dirac, *The Priciples of Quantum Mechanics 3rd ed.*, Sec. 6)

知っていただけでなく，量子論の定式化に不可欠であることを認識していた．「内積より双対」

ブラケット記法のむずかしさ

- V, V^* の間の (暗黙の) 対応関係

$$\langle\psi| \quad \Leftrightarrow \quad |\psi\rangle$$

この関係は内積を定義する． $(|\phi\rangle, |\psi\rangle) := \langle\phi|\psi\rangle$

- 共役演算子の定義

$$\forall\psi. \quad \langle\psi|\hat{A}^\dagger \quad \Leftrightarrow \quad \hat{A}|\psi\rangle$$

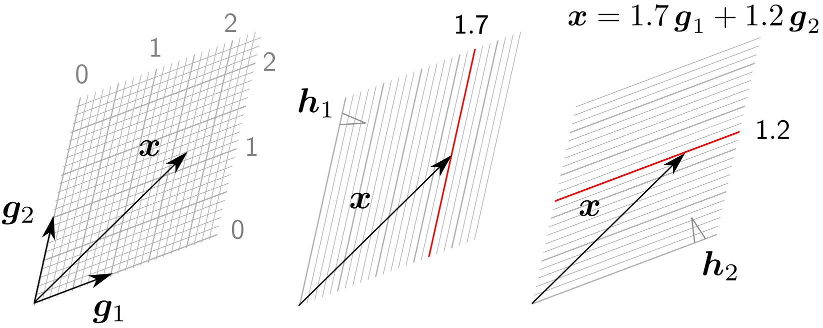
- よくある間違い

X $\quad \forall\phi,\psi. \quad (\langle\phi|\hat{A}^\dagger)|\psi\rangle = \langle\phi|(\hat{A}|\psi\rangle)$

○ $\quad \forall\phi,\psi. \quad \langle\phi|\hat{A}^\dagger|\psi\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\phi\rangle$

内積記法での定義 $(\hat{A}^\dagger|\phi\rangle, |\psi\rangle) = (|\phi\rangle, \hat{A}|\psi\rangle)$ に引っ張られている．

双対の幾何学的イメージ



$\boldsymbol{h}_1 \,|\, \boldsymbol{x} = 1.7$ $\qquad$ $\boldsymbol{h}_2 \,|\, \boldsymbol{x} = 1.2$

非正規/非直交基底のためのグラフ用紙

双対基底

線形空間 V に正規直交基底 $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ がとれない場合

- V の基底 $\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_n \in V$ に対し, V^* の基底 $\boldsymbol{h}_1, \ldots, \boldsymbol{h}_n \in V^*$ を

$$\boldsymbol{h}_i \mid \boldsymbol{g}_j = \delta_{ij}$$

  を満たすようにとる — 「双対基底」

- ベクトルごとの関係ではなく, 基底全体同士の関係.

$$\boldsymbol{h}_1 = \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_n), \quad \ldots$$

- (例) 3次元格子ベクトル $\boldsymbol{a}_j$, 逆格子ベクトル $\boldsymbol{b}_i$

$$\boldsymbol{b}_i \cdot \boldsymbol{a}_j = \delta_{ij}$$

  具体的には $\quad \boldsymbol{b}_1 = \dfrac{\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3}{\boldsymbol{a}_1 \cdot (\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_3)}, \quad \ldots$

変換則

- V の基底を取り替える

$$\bar{\boldsymbol{g}}_j = \sum_l \boldsymbol{g}_l V_{lj}$$

- 双対基底 $(\boldsymbol{h}_i \mid \boldsymbol{g}_j = \delta_{ij})$ の変換則は

$$\bar{\boldsymbol{h}}_i = \sum_k V^{-1}_{ik} \boldsymbol{h}_k \quad \text{反変}$$

- ベクトル $\boldsymbol{x} \in V$ とコベクトル $\boldsymbol{a} \in V^*$ の展開

$$\boldsymbol{x} = \sum_j \boldsymbol{g}_j x_j = \sum_j \bar{\boldsymbol{g}}_j \bar{x}_j \quad \boldsymbol{a} = \sum_i a_i \boldsymbol{h}_i = \sum_i \bar{a}_i \bar{\boldsymbol{h}}_i$$

- 成分の変換則

$$\bar{x}_j = \sum_i V^{-1}_{ji} x_i \quad \text{反変}, \quad \bar{a}_j = \sum_i a_i V_{ij} \quad \text{共変}$$

計量

- V と V^* の要素の間に普遍的な関係性はない．例えば関係

$$\boldsymbol{x} = \sum_i \boldsymbol{g}_i x_i \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{x}^* = \sum_i x_i \boldsymbol{h}_i$$

　は基底の選び方に依存する．

- V と V^* の要素の間に 1 対 1 の関係を設定することは，V に内積を定義することと等価．

(もくじ)

運動方程式の構造

- 通常の形

$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{f} \quad \text{あるいは} \quad m\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2} = \boldsymbol{f}$$

— 簡単化しすぎ.

- 構造が見えるように書き直すと,

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{v}$$ 速度の定義

$$\boxed{\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}}$$ 運動量と速度の関係

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}$$ 第 2 法則

Principia

THE

p.78

MATHEMATICAL PRINCIPLES

OF

NATURAL PHILOSOPHY.

DEFINITIONS.

DEFINITION I.

The quantity of matter is the measure of the same, arising from its density and bulk conjunctly.

Thus air of a double density, in a double space, is quadruple in quantity; in a triple space, sextuple in quantity. The same thing is to be understood of snow, and fine dust or powders, that are condensed by compression or liquefaction; and of all bodies that are by any causes whatever differently condensed. I have no regard in this place to a medium, if any such there is, that freely pervades the interstices between the parts of bodies. It is this quantity that I mean hereafter everywhere under the name of body or mass. And the same is known by the weight of each body; for it is proportional to the weight, as I have found by experiments on pendulums, very accurately made, which shall be shewn hereafter.

DEFINITION II.

The quantity of motion is the measure of the same, arising from the velocity and quantity of matter conjunctly.

The motion of the whole is the sum of the motions of all the parts; and therefore in a body double in quantity, with equal velocity, the motion is double; with twice the velocity, it is quadruple.

DEFINITION III.

The vis insita, *or innate force of matter, is a power of resisting, by which every body, as much as in it lies, endeavours to persevere in its present state, whether it be of rest, or of moving uniformly forward in a right line.*

This force is ever proportional to the body whose force it is; and differs nothing from the inactivity of the mass, but in our manner of conceiving

. . .

OF NATURAL PHILOSOPHY. 83

AXIOMS, OR LAWS OF MOTION.

LAW I.

Every body perseveres in its state of rest, or of uniform motion in a right line, unless it is compelled to change that state by forces impressed thereon.

Projectiles persevere in their motions, so far as they are not retarded by the resistance of the air, or impelled downwards by the force of gravity A top, whose parts by their cohesion are perpetually drawn aside from rectilinear motions, does not cease its rotation, otherwise than as it is retarded by the air. The greater bodies of the planets and comets, meeting with less resistance in more free spaces, preserve their motions both progressive and circular for a much longer time.

LAW II.

The alteration of motion is ever proportional to the motive force impressed; and is made in the direction of the right line in which that force is impressed.

If any force generates a motion, a double force will generate double the motion, a triple force triple the motion, whether that force be impressed altogether and at once, or gradually and successively. And this motion (being always directed the same way with the generating force), if the body moved before, is added to or subducted from the former motion, according as they directly conspire with or are directly contrary to each other; or obliquely joined, when they are oblique, so as to produce a new motion compounded from the determination of both.

LAW III.

To every action there is always opposed an equal reaction: or the mutual actions of two bodies upon each other are always equal, and directed to contrary parts.

Whatever draws or presses another is as much drawn or pressed by that other. If you press a stone with your finger, the finger is also pressed by the stone. If a horse draws a stone tied to a rope, the horse (if I may so say) will be equally drawn back towards the stone: for the distended rope, by the same endeavour to relax or unbend itself, will draw the horse as much towards the stone, as it does the stone towards the horse, and will obstruct the progress of the one as much as it advances that of the other.

archive.org

プリンキピア

定義 I 物質の量とは，その物質の密度と容積の相乗積をもって測られるものである．

$$m = \varrho_s V$$ 質量の定義

定義 II 運動の量とは，速度と物質の量の相乗積をもって測られるものである．

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$ 運動量の定義

法則 II 運動の変化は加えられた動力に比例し，かつその力が働いた直線の方向に沿って行われる．

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{f}$$ いわゆる第 2 法則

ニュートンは丁寧に書いている．

運動方程式の構造化のメリット

- １階の (連立) 微分方程式 — 数値計算に適している
- 状態変数 ($\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{v}$ or $\boldsymbol{p}$) が明確
- 量の間の関係性が見易い
- 正準方程式との親和性

電磁方程式との比較

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} + \operatorname{curl} \boldsymbol{E} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$$ 力場

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{H} = \mu_0^{-1} \boldsymbol{B}$$ 構成方程式

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} - \operatorname{curl} \boldsymbol{H} = -\boldsymbol{J}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = \varrho$$ 源場

構成方程式が最も非自明な式. $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ も.

速度 vs 運動量

- 両者は似てはいるが, 比例関係 $\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$ では済まない違いを秘めている. — 両者の区別が力学の肝

	速度 $\boldsymbol{v}$	運動量 $\boldsymbol{p}$
性格	可視的 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}$	不可視的 $\displaystyle\int \boldsymbol{f}\,\mathrm{d}t$
数学的帰属	接ベクトル $\in \mathrm{T}_p M$	余接ベクトル $\in \mathrm{T}^*_p M$
波動対応物	群速度 $\dfrac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}}$	位相速度 $\dfrac{\omega}{k}\dfrac{\boldsymbol{k}}{k}$

運動エネルギーと運動余エネルギー

- 微小仕事 $\Delta W = \boldsymbol{f} \cdot \Delta \boldsymbol{r}$ に運動方程式 $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{f}$ を代入すると

$$\Delta W = \boldsymbol{f} \cdot \Delta \boldsymbol{r} = \boldsymbol{f} \cdot (\boldsymbol{v} \Delta t) = (\boldsymbol{f} \Delta t) \cdot \boldsymbol{v} = \Delta \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v}$$

- 積分すると

$$W = \boxed{T(\boldsymbol{p}) := \int_0^{\boldsymbol{p}} \mathrm{d}\boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{v}(\boldsymbol{p}')} \quad \text{運動エネルギー}$$

- チェーン則 $\Delta \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} = \Delta(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v}) - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v}$ を用いて積分すると,

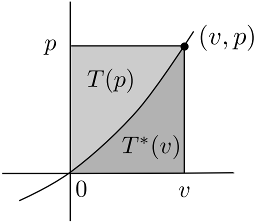
$$W = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} - \int_0^{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{v}') \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} - T^*(\boldsymbol{v})$$

ここで,

$$\boxed{T^*(\boldsymbol{v}) := \int_0^{\boldsymbol{v}} \boldsymbol{p}(\boldsymbol{v}') \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{v}'} \quad \text{運動余エネルギー}$$

ルジャンドル変換 — 1 次元の場合

$$T(p) = \int_0^p v(p')\mathrm{d}p'$$



$$T^*(v) = \int_0^v p(v')\mathrm{d}v'$$

- $T(p)$ と $T^*(v)$ はルジャンドル双対の関係

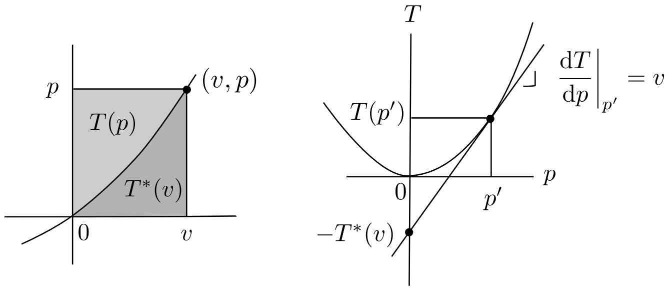
$$T^*(v) = p(v)\,v - T(p(v)) \quad \leftrightarrow \quad T(p) = p\,v(p) - T^*(v(p))$$

- 線形関係 $p = mv$ の場合

$$T^*(v) = \frac{mv^2}{2} = T(mv) \quad \leftrightarrow \quad T(p) = \frac{p^2}{2m} = T^*(p/m)$$

— 符号反転が見えなくなる

通常のルジャンドル変換の説明図との比較



(a) (b)

通常，ルジャンドル変換は図 (b) のように $T(p)$ (あるいは $T^*(v)$) の接線を用いて説明される.

運動余エネルギー $T^*(v)$ の役割

- (一般化) 運動量を生成

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial T^*(\boldsymbol{v})}{\partial \boldsymbol{v}} \qquad T^* \text{ は運動状態のポテンシャル}$$

可視的な $\boldsymbol{v}$ から不可視的な $\boldsymbol{p}$ を生成する.

- 運動方程式 $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F}$ が以下の形に書ける.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial T^*}{\partial \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F}$$

- 力がポテンシャルから導かれる場合, $\boldsymbol{F} = -\partial V(\boldsymbol{r})/\partial \boldsymbol{r}$ には

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = 0, \quad L(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}) = T^*(\boldsymbol{v}) - V(\boldsymbol{r})$$

ラグランジアンとハミルトニアン

- ラグランジアン

$$L(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}) = T^*(\boldsymbol{v}) - V(\boldsymbol{r})$$

- ハミルトニアン

$$H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}) = T(\boldsymbol{p}) + V(\boldsymbol{r})$$

- ルジャンドル双対の関係

$$L(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}) \quad \leftrightarrow \quad H(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r})$$

$V(\boldsymbol{r})$ は $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{p})$ を含まないので単なるパラメータ

- 符号反転の影響は $V(\boldsymbol{r})$ に現れている.

運動不定性

- 運動余エネルギーを

$$\bar{T}^*(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}, t) = T^*(\boldsymbol{v}) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\beta(\boldsymbol{r}, t)$$

で置き換える．β は任意関数．

- 運動量は影響を受ける．

$$\bar{\boldsymbol{p}} = \frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \boldsymbol{v}} = \boldsymbol{p} + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{v}}\left(\frac{\partial \beta}{\partial \boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial \beta}{\partial t}\right) = \boldsymbol{p} + \frac{\partial \beta}{\partial \boldsymbol{r}}$$

ゲージ自由度

- 運動方程式はゲージ変換の影響を受けない；

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \bar{T}^*}{\partial \boldsymbol{v}} - \frac{\partial T^*}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} + \cancel{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \beta}{\partial \boldsymbol{r}}} - \cancel{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}} = \boldsymbol{F}$$

計算を一部省略した (全微分 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$ の展開が必要)．

変分を使えばより簡単 (ランダウ・リフシッツ: 力学 p. 4)

ガリレイ変換

速度 $\boldsymbol{V}$ で等速運動する系 $\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}$

- 運動余エネルギー

$$\begin{aligned}
\bar{T}^*(\bar{\boldsymbol{v}}) &= T^*(\boldsymbol{v}) \\
&= \frac{m}{2}\left(\bar{v}^2 + 2\bar{\boldsymbol{v}}\cdot\boldsymbol{V} + V^2\right) \\
&= \frac{m\bar{v}^2}{2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[m\bar{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{V} + \frac{mV^2}{2}t\right]
\end{aligned}$$

- カッコ内を無視するかしないかで異なる運動量

$$\begin{aligned}
\bar{\boldsymbol{p}}_1 &= m\bar{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{p} - m\boldsymbol{V} \\
\bar{\boldsymbol{p}}_2 &= m\bar{\boldsymbol{v}} + m\boldsymbol{V} = \boldsymbol{p}
\end{aligned}$$

(波動関数の波数に関する Landé's paradox)

その他の見どころ

- 歴史的実験や学生実験的な話題を取り上げた
- 力学の単位 (kg, N) の歴史的進化
- 変分法を用いない解析力学 方法 1 (方法 2 は準備中)
- 非慣性基準系 — 慣性力と見かけの力の区別
- 計算コード例の公開 (オンライン)