非エルミート量子力学

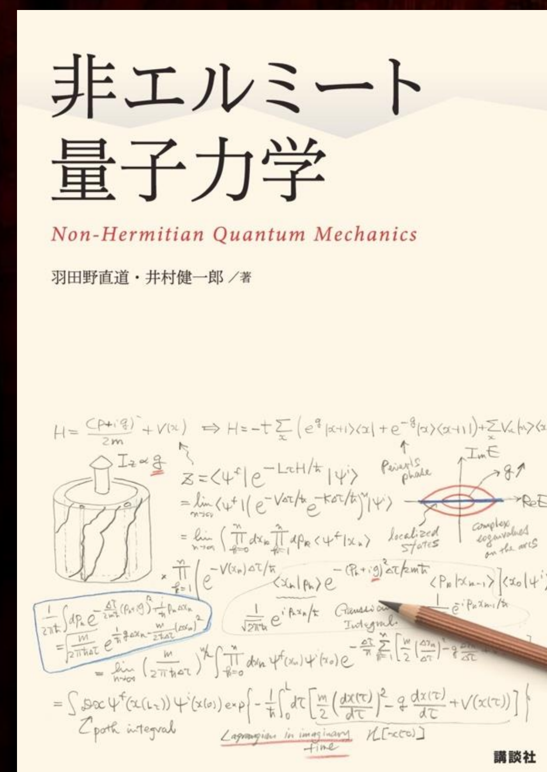
現在・過去・未来

羽田野直道（東大生研）

現在：開放量子系の
　非エルミート性

過去：非エルミート
　Hatano-Nelson模型

未来：開放量子系の
　非マルコフ性



1993: 博士（鈴木増雄研）

久保亮五の孫弟子

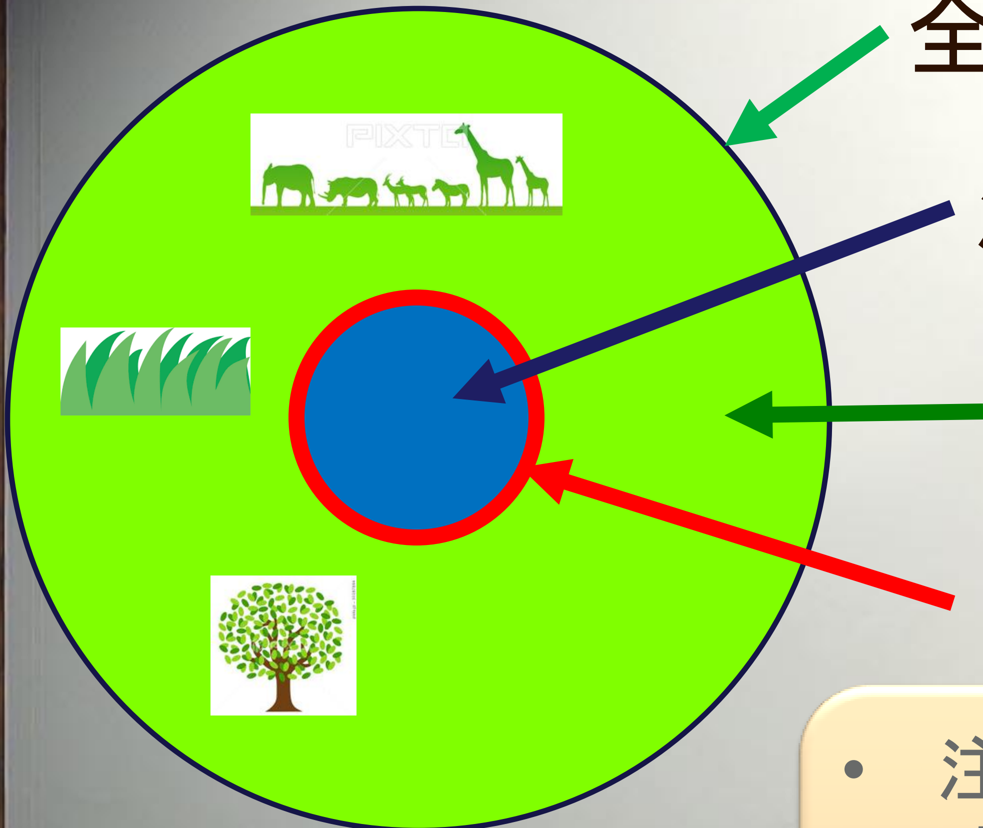
1995-2002: ハーバード大・

ロスアラモス・青学

2002- : 東京大学・生産技術研究所

スピングラス・量子モンテカルロ法・量子系相転移・非エルミート量子力学・経済物理学・複雑ネットワーク

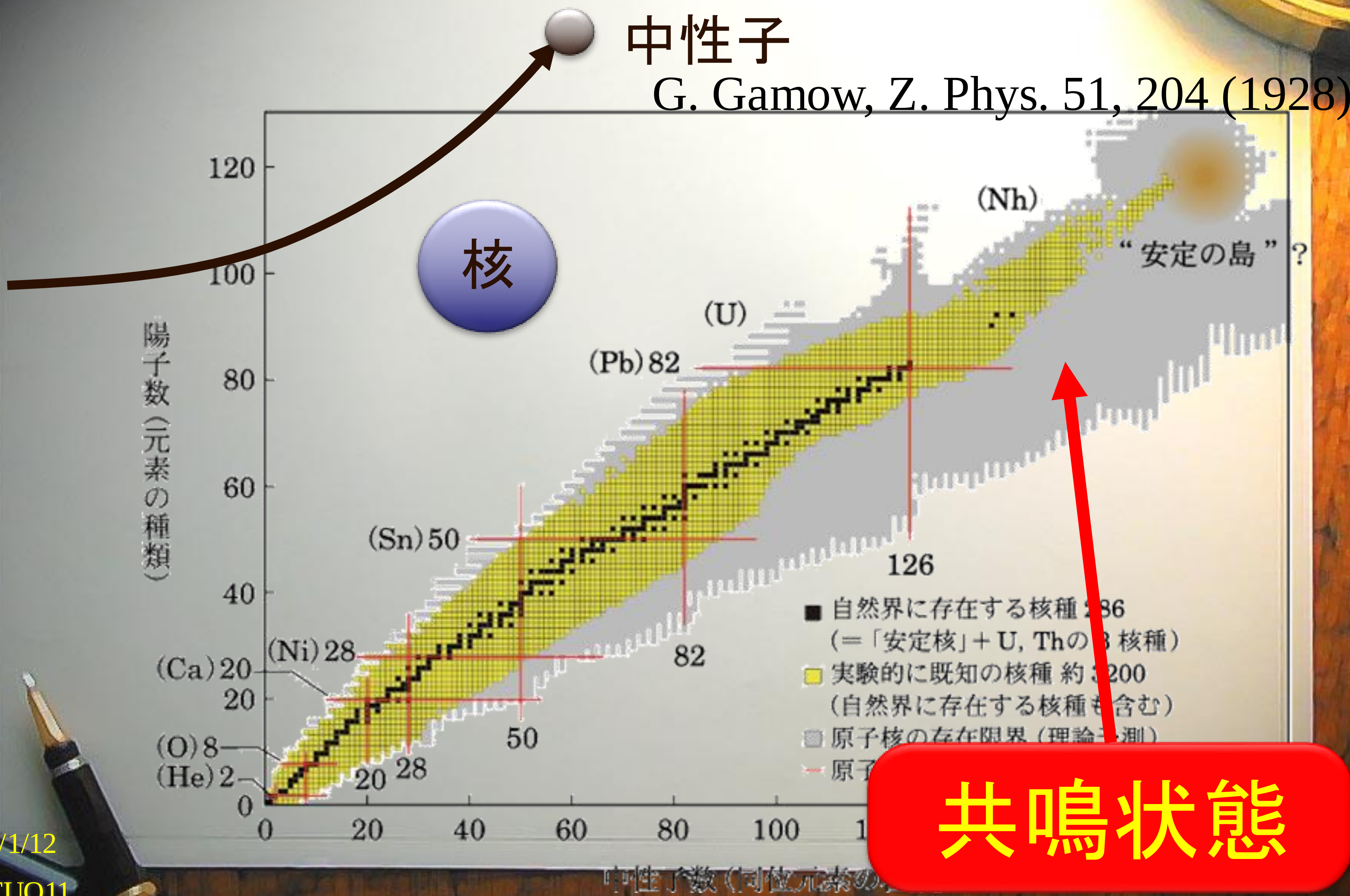
開放量子系



- 注目系が環境系と粒子やエネルギーをやりとりしている（非保存）
- 実験では常に非保存

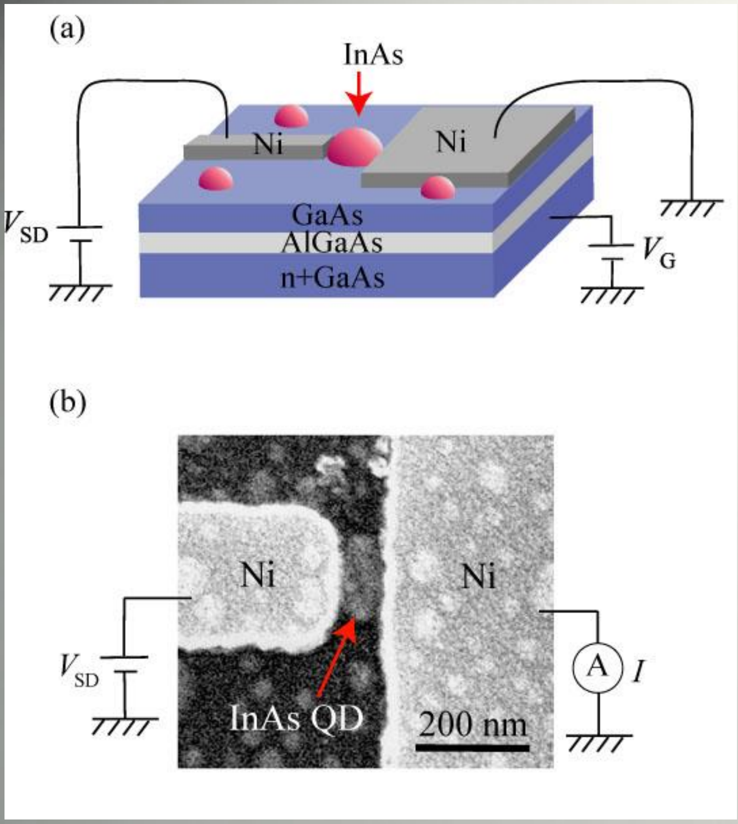
開放量子系

開放量子系

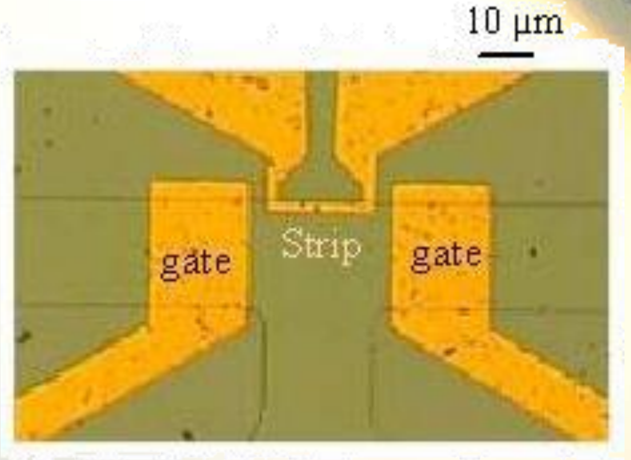


中性子
G. Gamow, Z. Phys. 51, 204 (1928)
核
共鳴状態
陽子数（元素の種類）
中性子数（同位元素の
120
100
80
60
40
20
0
(Nh)
(U)
(Pb) 82
(Sn) 50
(Ni) 28
(Ca) 20
(O) 8
(He) 2
"安定の島"?
126
82
50
20
28
■ 自然界に存在する核種
実験的に既知の核種
(自然界に存在する核種も含む)
原子核の存在限界

開放量子系

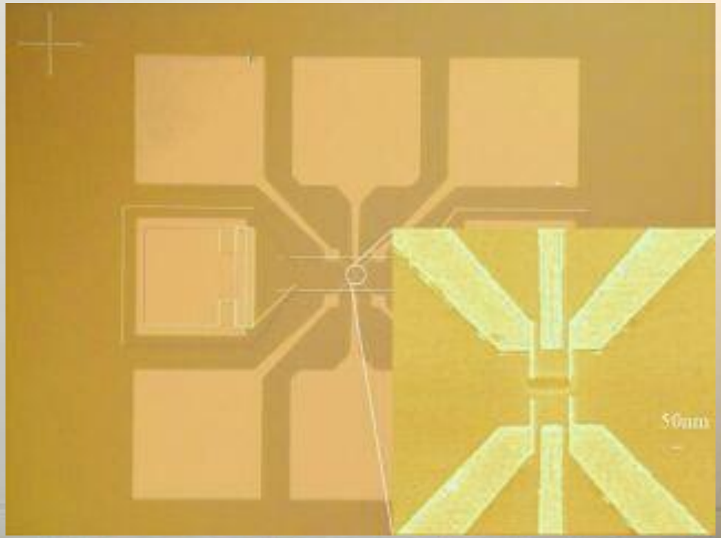


T. Machida (IIS, U. Tokyo)



T. Machida (IIS, U. Tokyo)

S. Katsumoto (ISSP, U. Tokyo)



開放量子系

開放量子系の特徴

非エルミート性・非マルコフ性

意義：注目系を乱すことが前提

実験との対応が容易

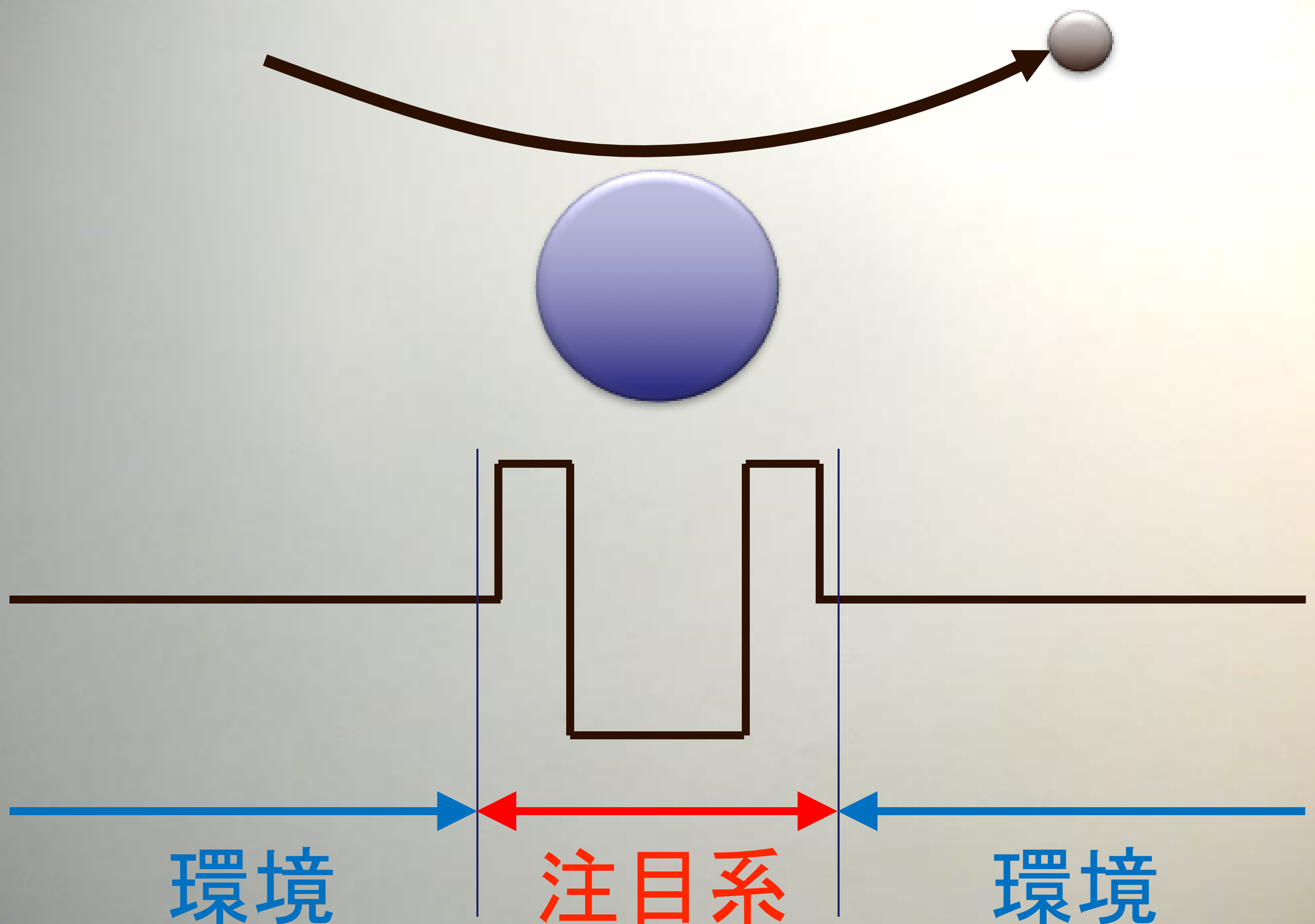
対応する実験が容易

展望：注目系と環境系が強く結合

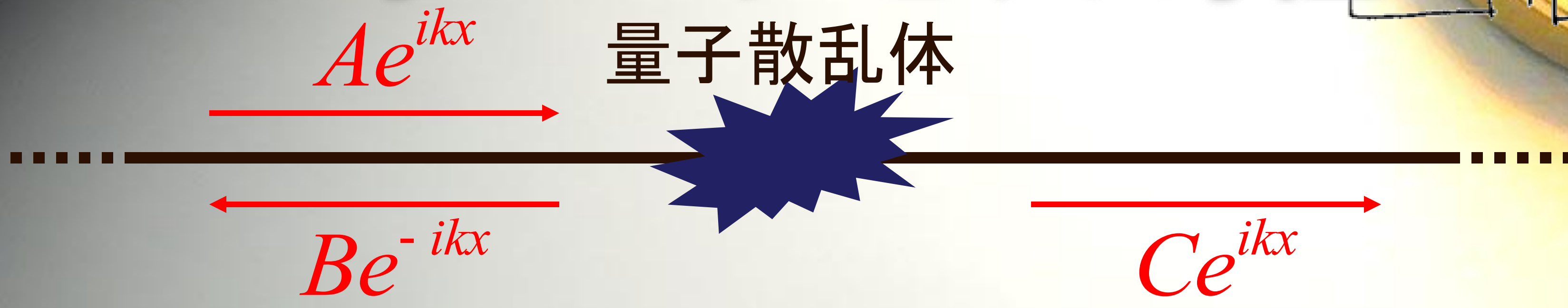
した系の新しい物理

非エルミート性

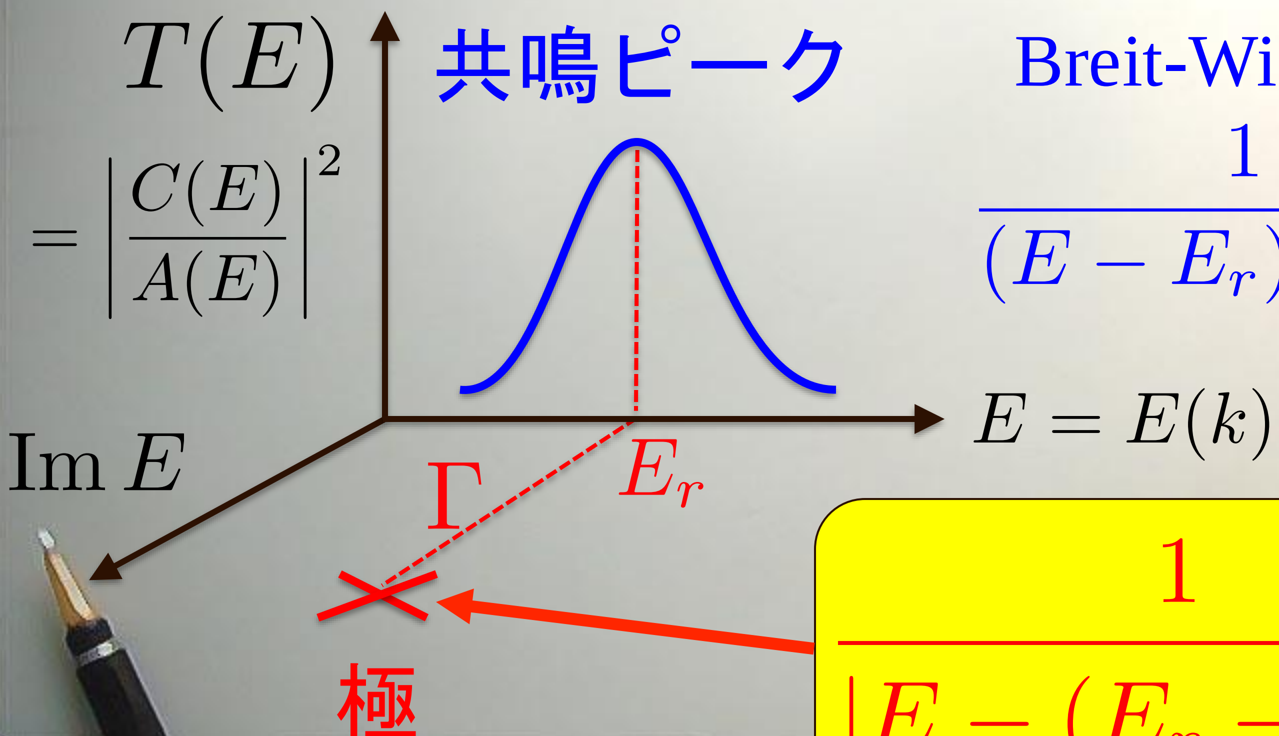
一体問題：シュレーディンガー方程式



共鳴ピークと共鳴極



$$T(E) = \left|\frac{C(E)}{A(E)}\right|^2$$

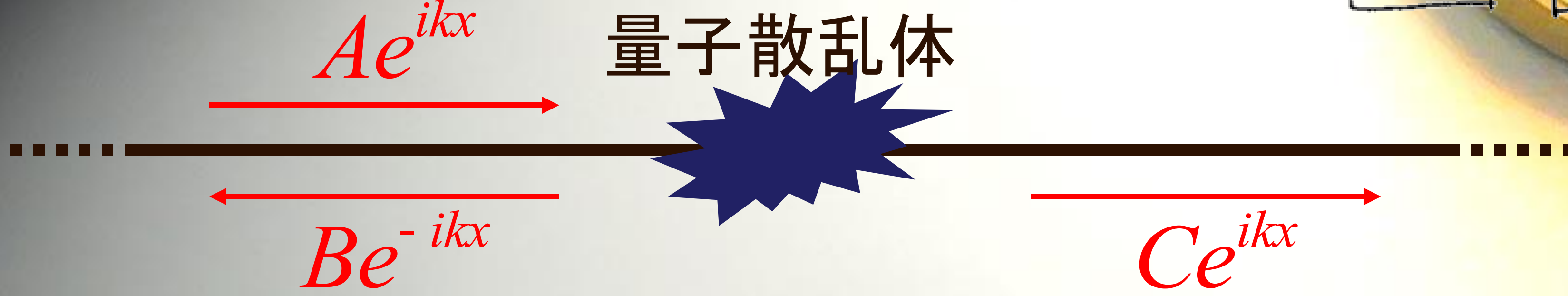


Breit-Wigner型

$$\frac{1}{(E-E_r)^2+\Gamma^2}$$

$$\frac{1}{\left|E-(E_r-\mathrm{i}\Gamma)\right|^2}$$

共鳴極と共鳴状態



$$T(E)=\left|\frac{C(E)}{A(E)}\right|^2\propto\frac{1}{|E-(E_r-\mathrm{i}\Gamma)|^2}$$

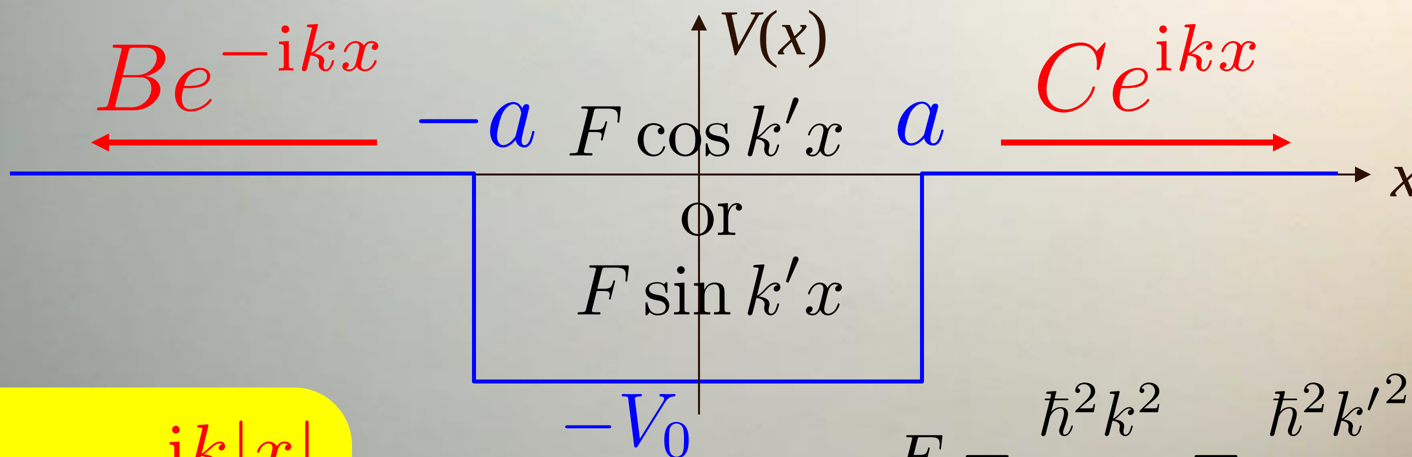
極の位置：$A(E)=0$ の解

極の波動関数：$\psi(x)\sim e^{\mathrm{i}k|x|}$

共鳴状態の固有値・固有関数

Siegert 境界条件 (1939)
共鳴状態：外向波のみの境界条件下の固有状態

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+V(x)\right)\psi(x)=E\psi(x)$$



$$E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}=\frac{\hbar^2k'^2}{2m}-V_0$$

$$\psi(x)\sim e^{\mathrm{i}k|x|}$$

共鳴状態の固有値・固有関数

偶関数解

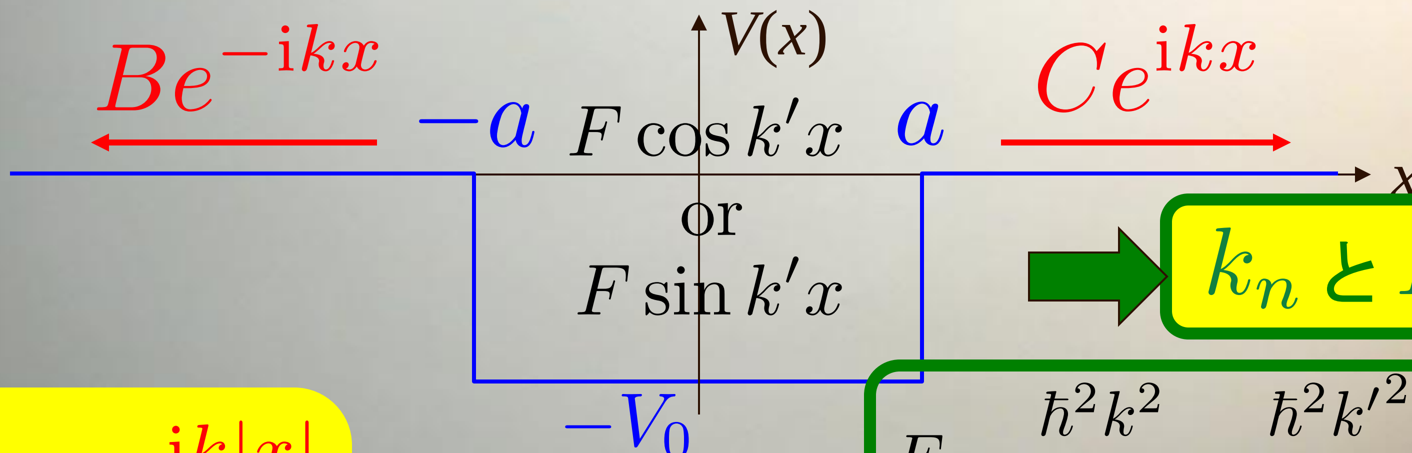
$$F\cos k'a = Ce^{ika}$$
$$-Fk'\sin k'a = Cike^{ika}$$

$$\boxed{-k'\tan k'a = ik}$$

奇関数解

$$F\sin k'a = Ce^{ika}$$
$$Fk'\cos k'a = Cike^{ika}$$

$$\boxed{k'\cot k'a = ik}$$



$\boxed{k_n \text{ と } E_n}$

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 {k'}^2}{2m} - V_0$$

$$\psi(x) \sim e^{ik|x|}$$

共鳴状態の固有値

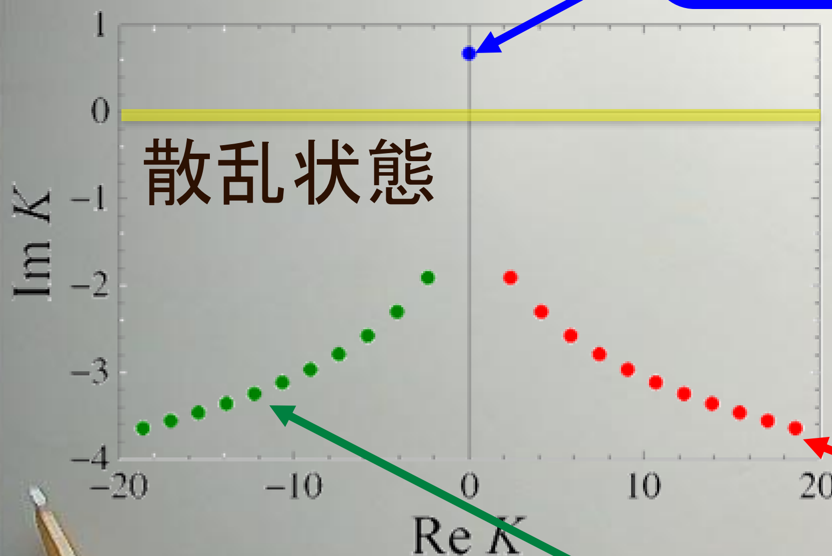
$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+V(x)\right)\psi(x)=E\psi(x)$$

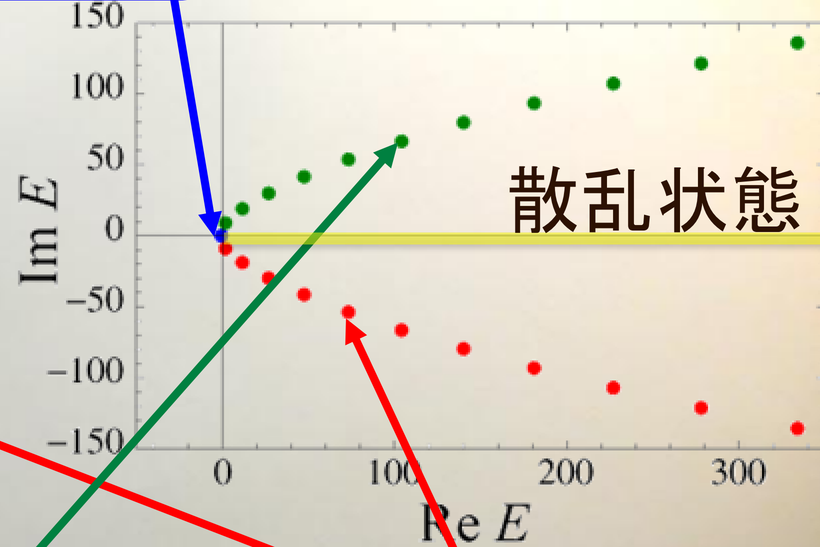
$\boxed{k_n}$

$k_n = \mathrm{i}\kappa$

束縛状態

$$\boxed{E_n=\frac{\hbar^2 {k_n}^2}{2m}}$$





反共鳴状態
内向波のみ

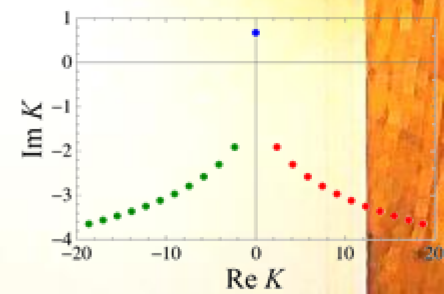
共鳴状態
外向波のみ

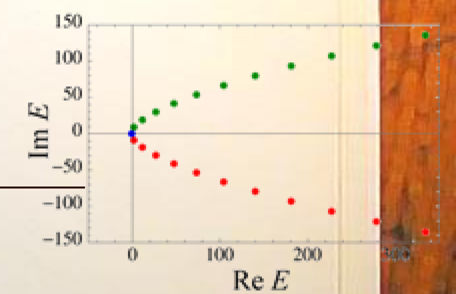
$$\psi_n(x)\sim e^{\mathrm{i}k_n|x|}$$

共鳴状態の物理的描像

N. Hatano, K. Sasada, H. Nakamura and T. Petrosky, Prog. Theor. Phys. **119** (2008) 187

$$\psi_n(x)e^{-\mathrm{i}E_n t} \sim e^{\mathrm{i}k_n|x|-\mathrm{i}E_n t}$$





反共鳴状態

内向波のみ

$\mathrm{Im}\,E_n \gtrless 0$ Û $\mathrm{Re}\,K_n \gtrless 0$

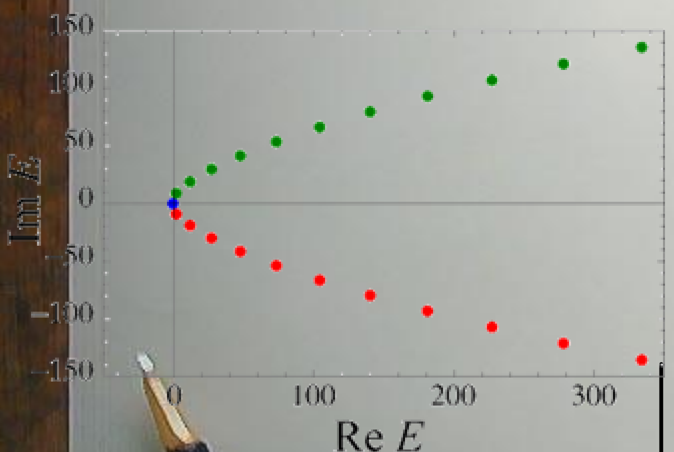
固有状態としての
共鳴状態（減衰する解）

質問１　$[H,T]=0$

H と T の同時固有状態があるのでは？

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$
$$T|\psi\rangle \propto |\psi\rangle$$

$$\begin{aligned} H(T|\psi\rangle) &= T(H|\psi\rangle) \\ &= TE|\psi\rangle \\ &\cancel{= E(T|\psi\rangle)} \\ &= E^*(T|\psi\rangle) \end{aligned}$$



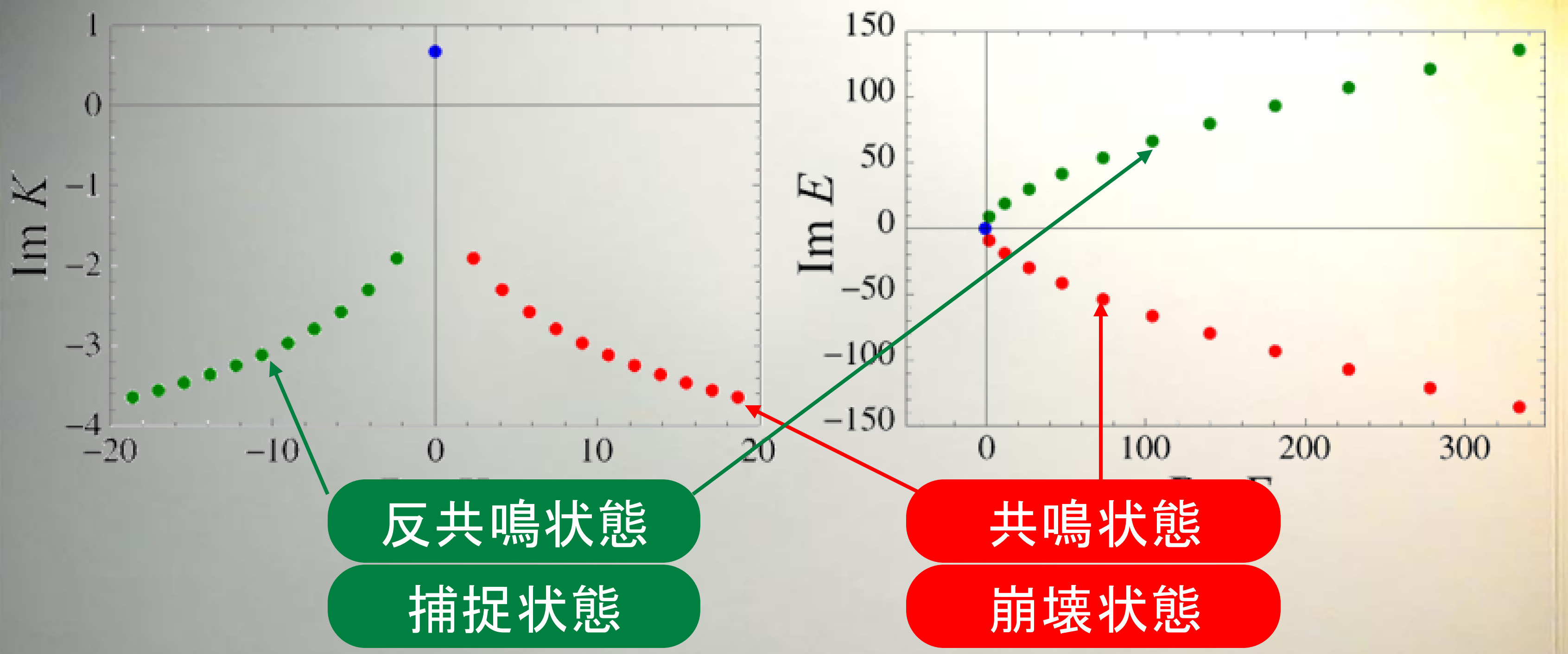
$|\psi\rangle$: 共鳴状態（固有値 E）

$T|\psi\rangle = |\psi\rangle^*$: 反共鳴状態（固有値 E^*）

時間反転対称性

N. Hatano, K. Sasada, H. Nakamura and T. Petrosky, Prog. Theor. Phys. **119** (2008) 187

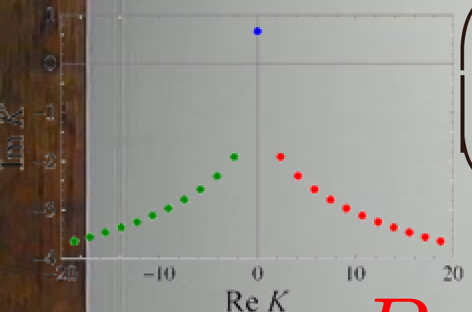
Eigen-wave-number　　　　Eigenenergy



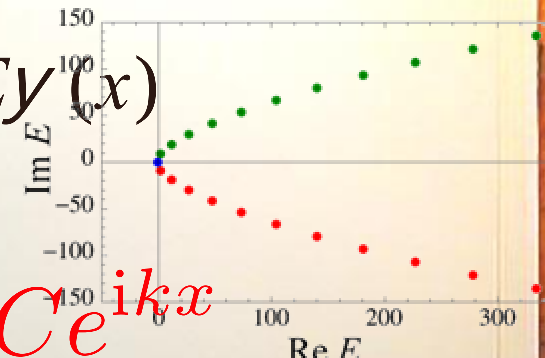
時間反転が反線形　⇒　方程式は時間反転対称でも、個々の解が時間反転対称性を破ってよい

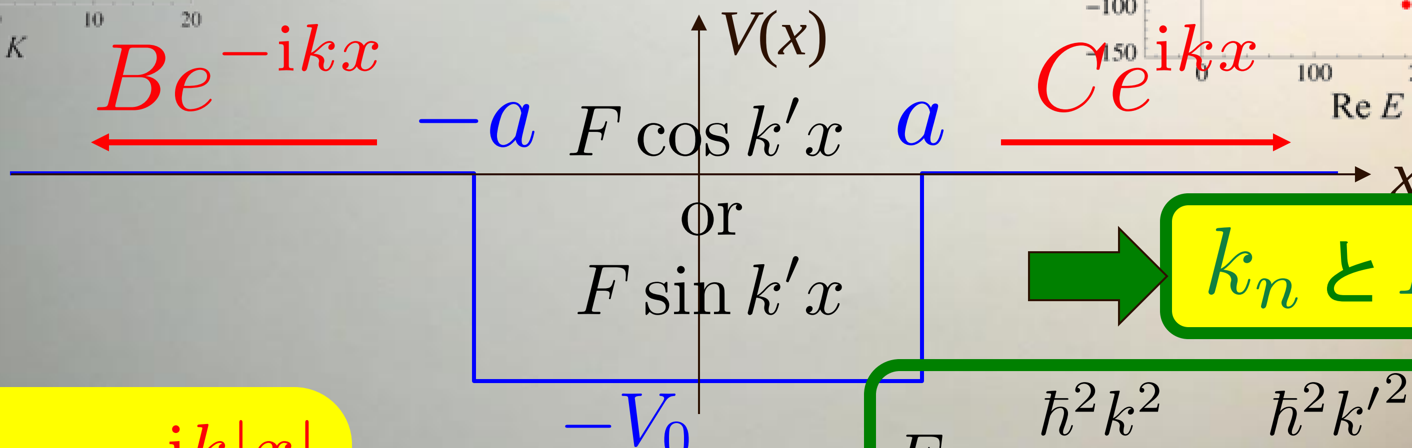
質問2

ハミルトニアンがエルミートなのに、
どうして複素固有値が現れる？



$$\left(-\frac{\Box^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)\right)y(x)=Ey(x)$$





k_n と E_n

$$E=\frac{\hbar^2k^2}{2m}=\frac{\hbar^2{k'}^2}{2m}-V_0$$

$$\psi(x)\sim e^{ik|x|}$$

開放量子系の非エルミート性

N. Hatano, K. Sasada, H. Nakamura and T. Petrosky, Prog. Theor. Phys. **119** (2008) 187

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(x) \quad \text{ただし } \operatorname{Im} V(x) \neq 0$$

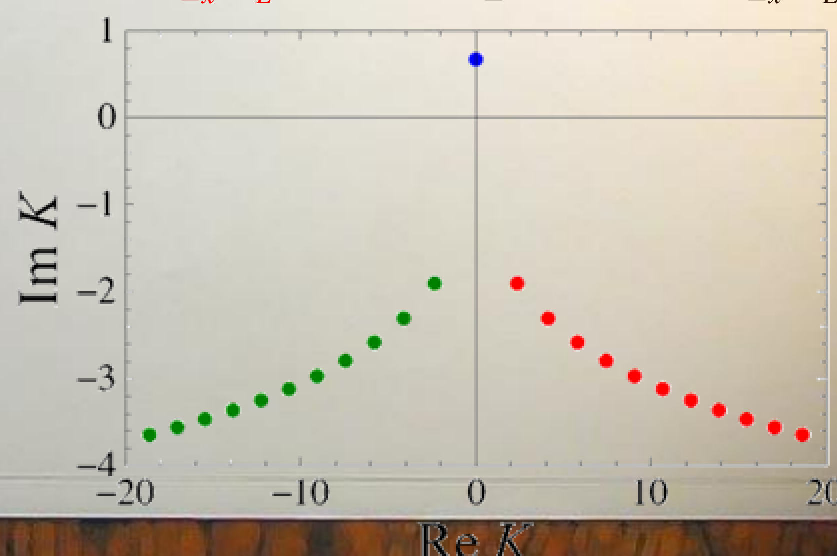
$$\Omega = [-L, L]$$

$$\langle \psi | \hat{p}^2 | \psi \rangle_\Omega = -\hbar^2 \int_{-L}^{L} \psi(x)^* \psi''(x) dx = -\hbar^2 \left[\psi(x)^* \psi'(x) \right]_{x=-L}^{L} + \hbar^2 \int_{-L}^{L} \psi'(x)^* \psi'(x) dx$$

$$) \langle \psi | \hat{p}^2 | \psi \rangle_\Omega^* = -\hbar^2 \int_{-L}^{L} \psi(x) \psi''(x)^* dx = -\hbar^2 \left[\psi(x) \psi'(x)^* \right]_{x=-L}^{L} + \hbar^2 \int_{-L}^{L} \psi'(x) \psi'(x)^* dx$$

$$2i \operatorname{Im} \langle \psi | \hat{p}^2 | \psi \rangle_\Omega = -\hbar^2 \left[\psi(x)^* \psi'(x) - \psi(x) \psi'(x)^* \right]_{x=-L}^{L} = -2i\hbar \operatorname{Re} \left[\psi(x)^* \hat{p} \psi(x) \right]_{x=-L}^{L}$$

$$\psi_n(x) \sim e^{\mathrm{i} k_n |x|}$$



開放量子系の非エルミート性

N. Hatano, K. Sasada, H. Nakamura and T. Petrosky, Prog. Theor. Phys. **119** (2008) 187

空間的に発散 →
通常の関数空間の外

$$2i\,\mathrm{Im}\langle\psi|\hat{p}^2|\psi\rangle = -\hbar^2\left[\psi(x)^*\psi'(x)-\psi(x)\psi'(x)^*\right]_{x=-L}^{L} = -2i\hbar\,\mathrm{Re}\left[\psi(x)^*\hat{p}\psi(x)\right]_{x=-L}^{L}$$

$$\psi_n(x) \sim e^{\mathrm{i}k_n|x|}$$

質問2

ハミルトニアンがエルミートなのに、
どうして複素固有値が現れる？

$$\left(-\frac{\hbar^2}{\;}\frac{d^2}{\;}+V(x)\right)\psi(x)=E\psi(x)$$

ヒルベルト空間内でエルミートな
ハミルトニアンも、
より大きな関数空間では非エルミート
↓
非エルミート性が環境に隠れている

質問３

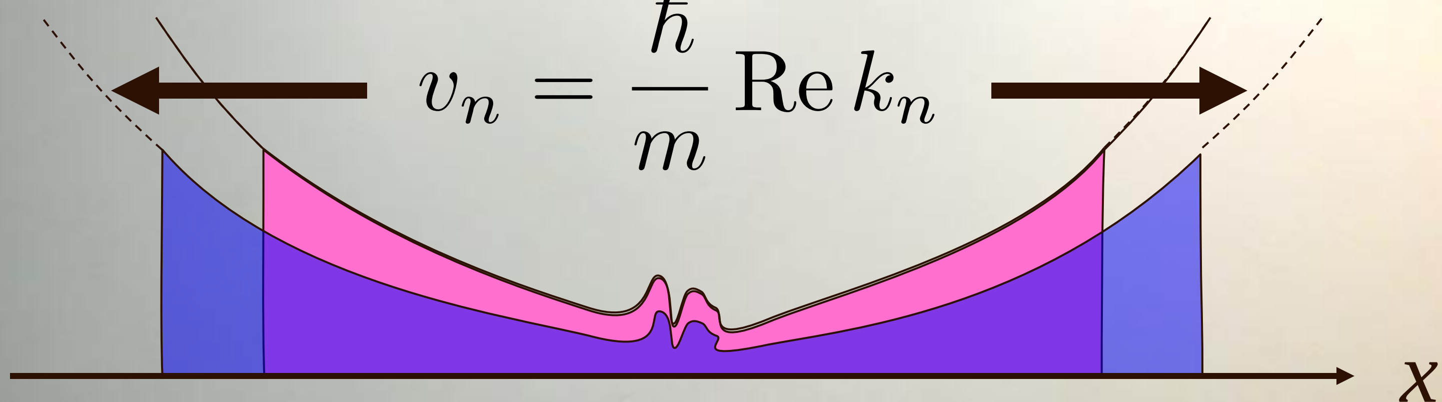
発散する波動関数なんて物理的に意味があるの？

$$\psi_n(x) \sim e^{\mathrm{i}k_n|x|}$$

共鳴状態の確率解釈

N. Hatano, K. Sasada, H. Nakamura and T. Petrosky, Prog. Theor. Phys. **119** (2008) 187

$$\left| e^{\mathrm{i}k_n|x| - \mathrm{i}E_n t} \right|^2 = e^{2|\mathrm{Im}\,k_n||x| - 2|\mathrm{Im}\,E_n|t}$$



空間的発散＋時間的減衰

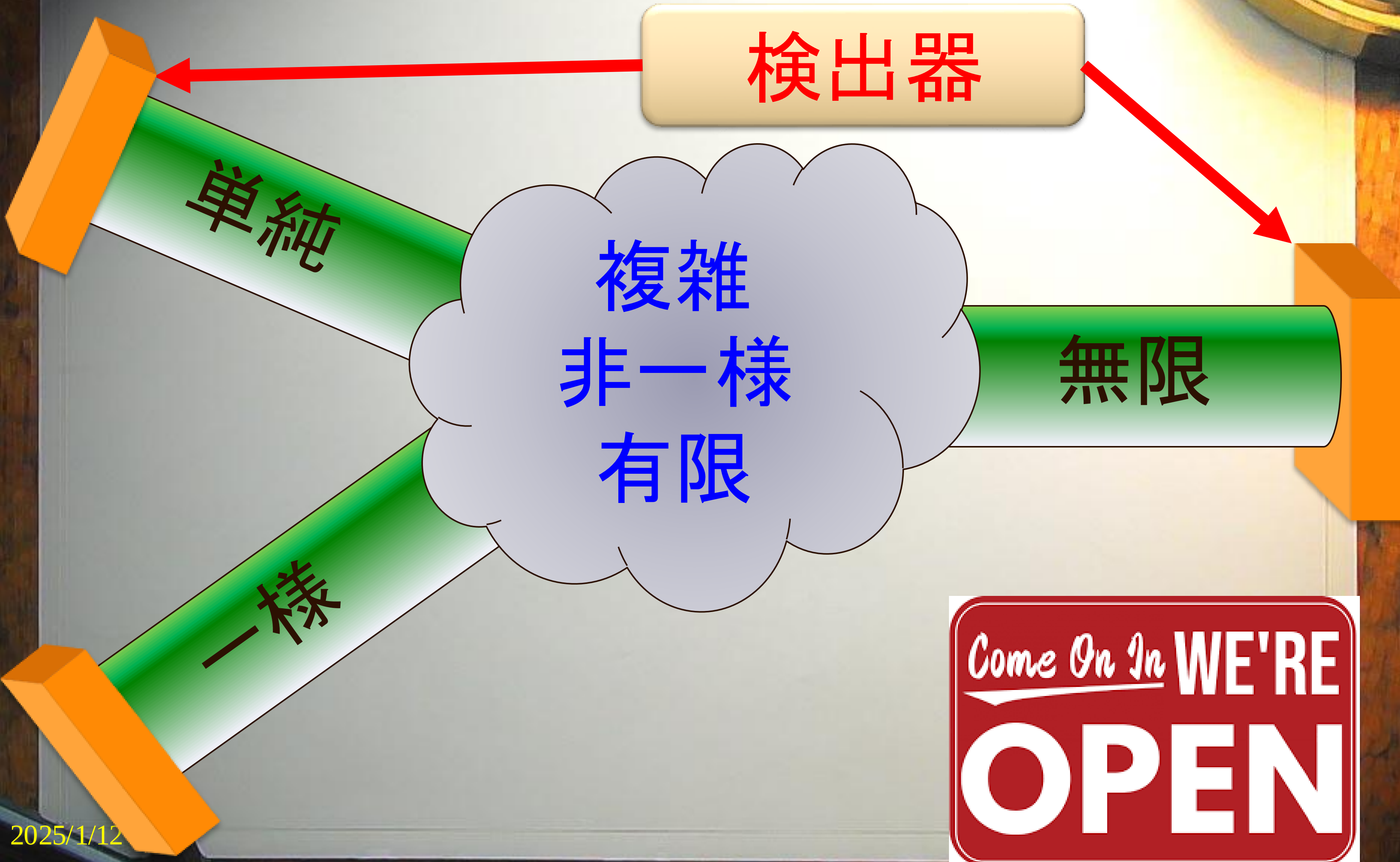
⇒　確率保存

質問3

発散する波動関数なんて
物理的に意味があるの？

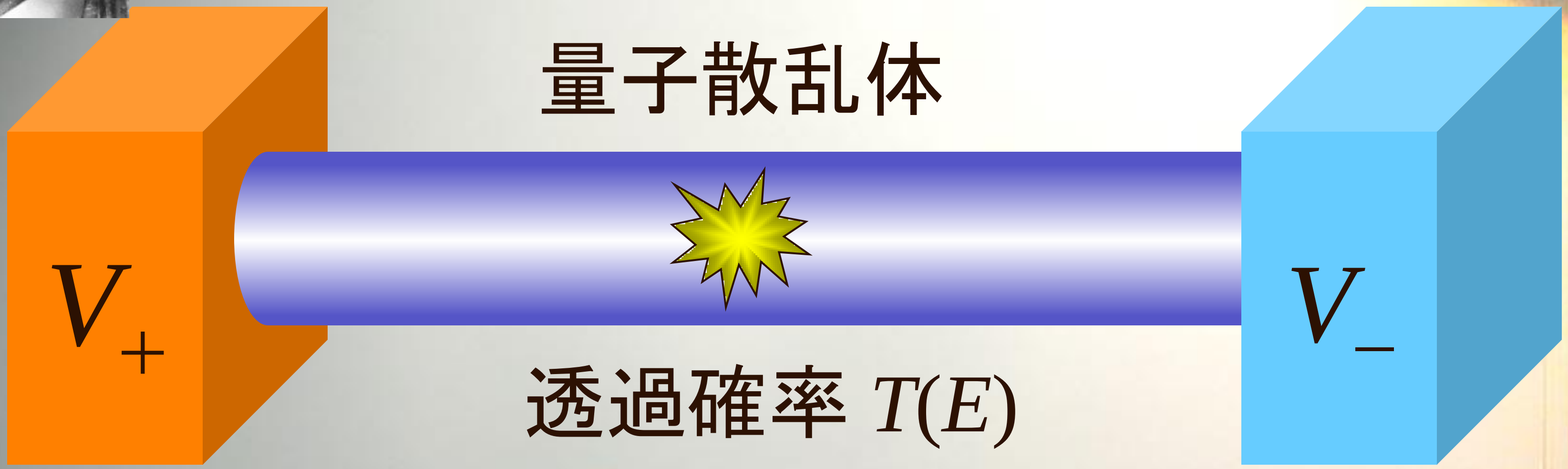
$$\psi_n(x) \sim e^{\mathrm{i}k_n|x|}$$

開放量子系



ランダウアー公式

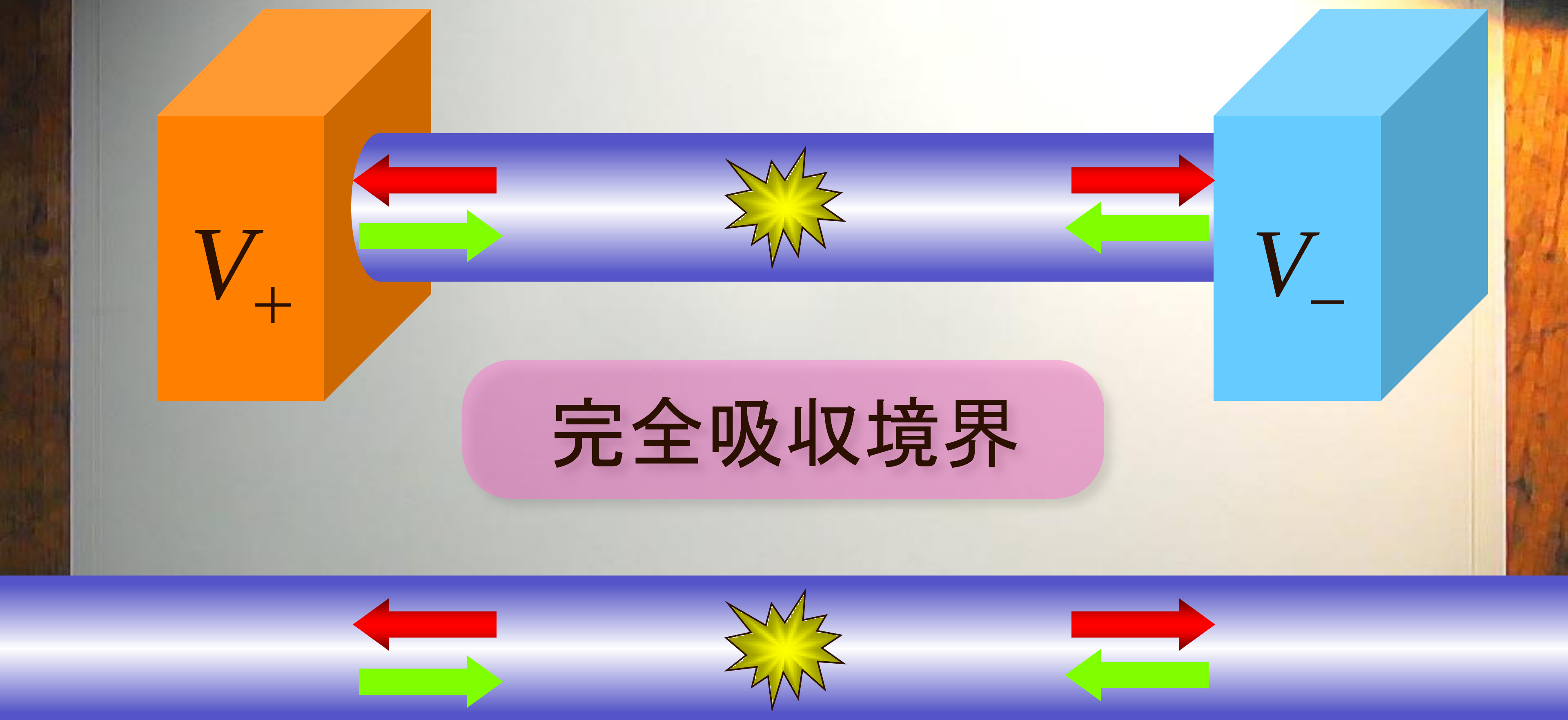
S. Datta “Electronic Transport in Mesoscopic Systems”



コンダクタンス（抵抗の逆数）

電極のある系 → $$G = \frac{2e^2}{h} T(E_\mathrm{F})$$ ← 無限系

開放量子系



共鳴状態への疑問の答え

1. 方程式が時間反転対称でも解が時間反転対称性を破ってよい
2. 解がヒルベルト空間外にあるので、複素固有値を持ってよい
3. 空間的発散と時間的減衰がキャンセルして確率を保存する
4. 注目系に微視的確率、環境に巨視的確率があることを表現

共鳴状態で減衰を調べる

G. Ordonez, N. Hatano, J. Phys. A: Math. Theor. **50** (2017) 405304

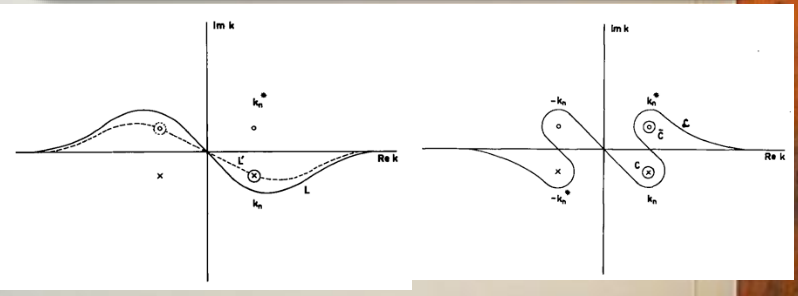
- 共鳴状態で崩壊現象を表現する
- 時間反転対称性を保った議論
- 新しい完全系を発見

減衰を扱う従来の議論

1. 共鳴状態を部分的に任意に採用する
2. 背景積分が必ず残る
3. 時間反転対称性を「手で」破っている

$$I = \sum_{\text{bound}} |\psi_{\text{b}}\rangle\langle\psi_{\text{b}}| + \boxed{\int dk |\psi_k\rangle\langle\psi_k|}$$

(R. Newton, 1960)

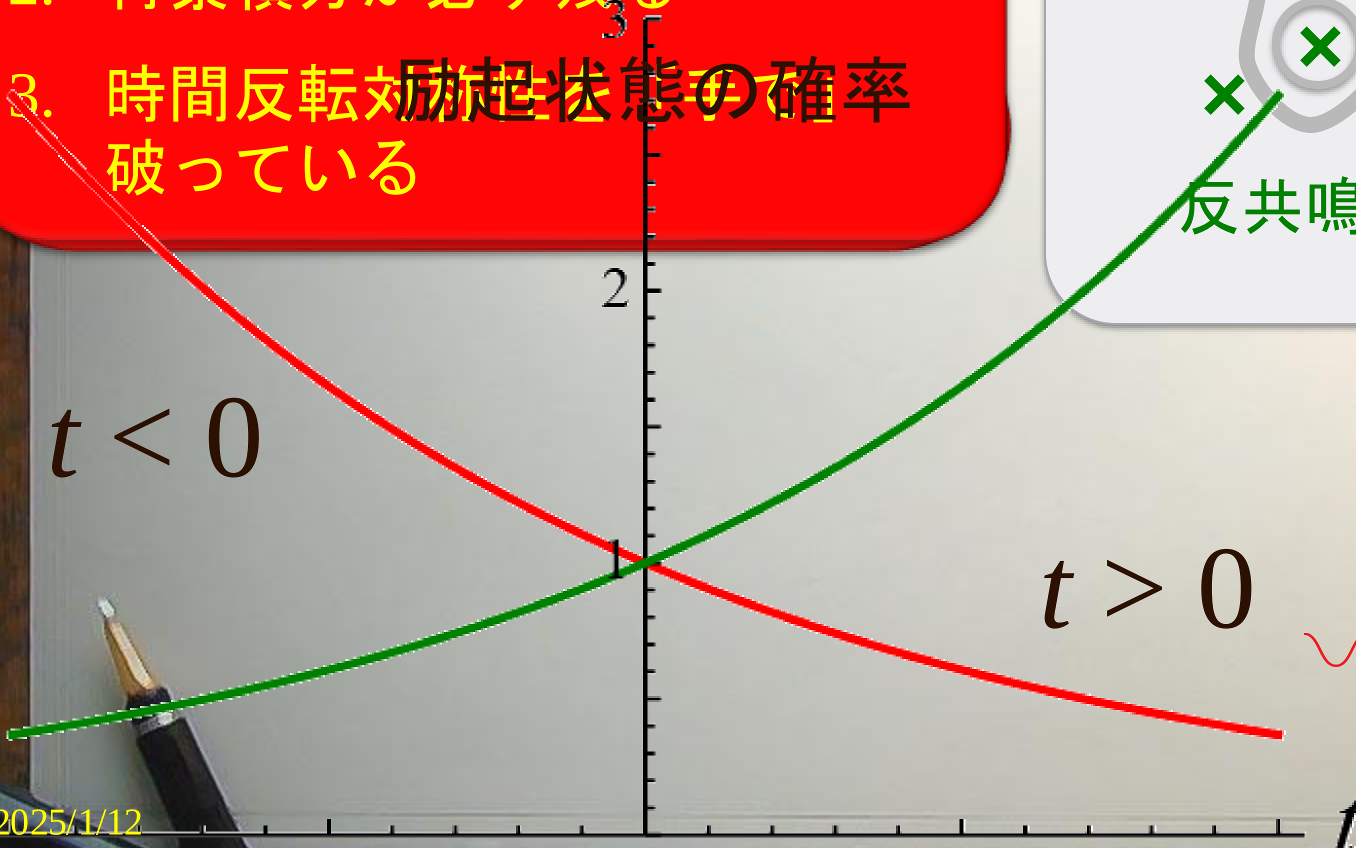


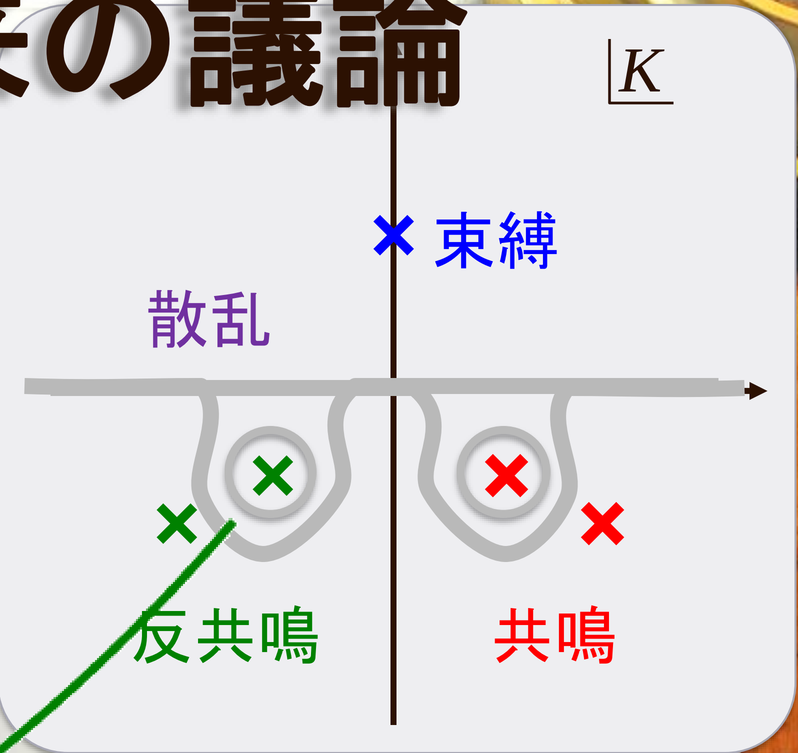
(T. Berggren, 1982)

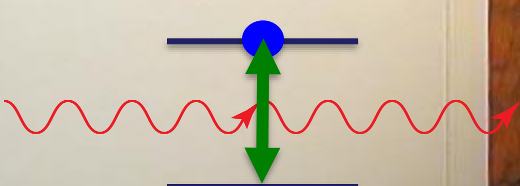
$$I = \sum_{\text{bound}} |\psi_{\text{b}}\rangle\langle\psi_{\text{b}}| + \boxed{\int_{\text{modified}} dk |\psi_k\rangle\langle\psi_k|} + \boxed{\sum_{\text{res}} |\psi_n\rangle\langle\tilde{\psi}_n|}$$

減衰を扱う従来の議論

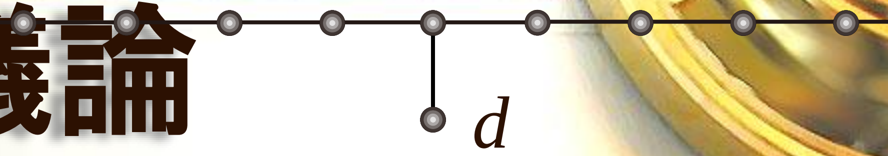
1. 共鳴状態を部分的に任意に採用する
2. 背景積分が必ず残る
3. 時間反転対[illegible]破っている



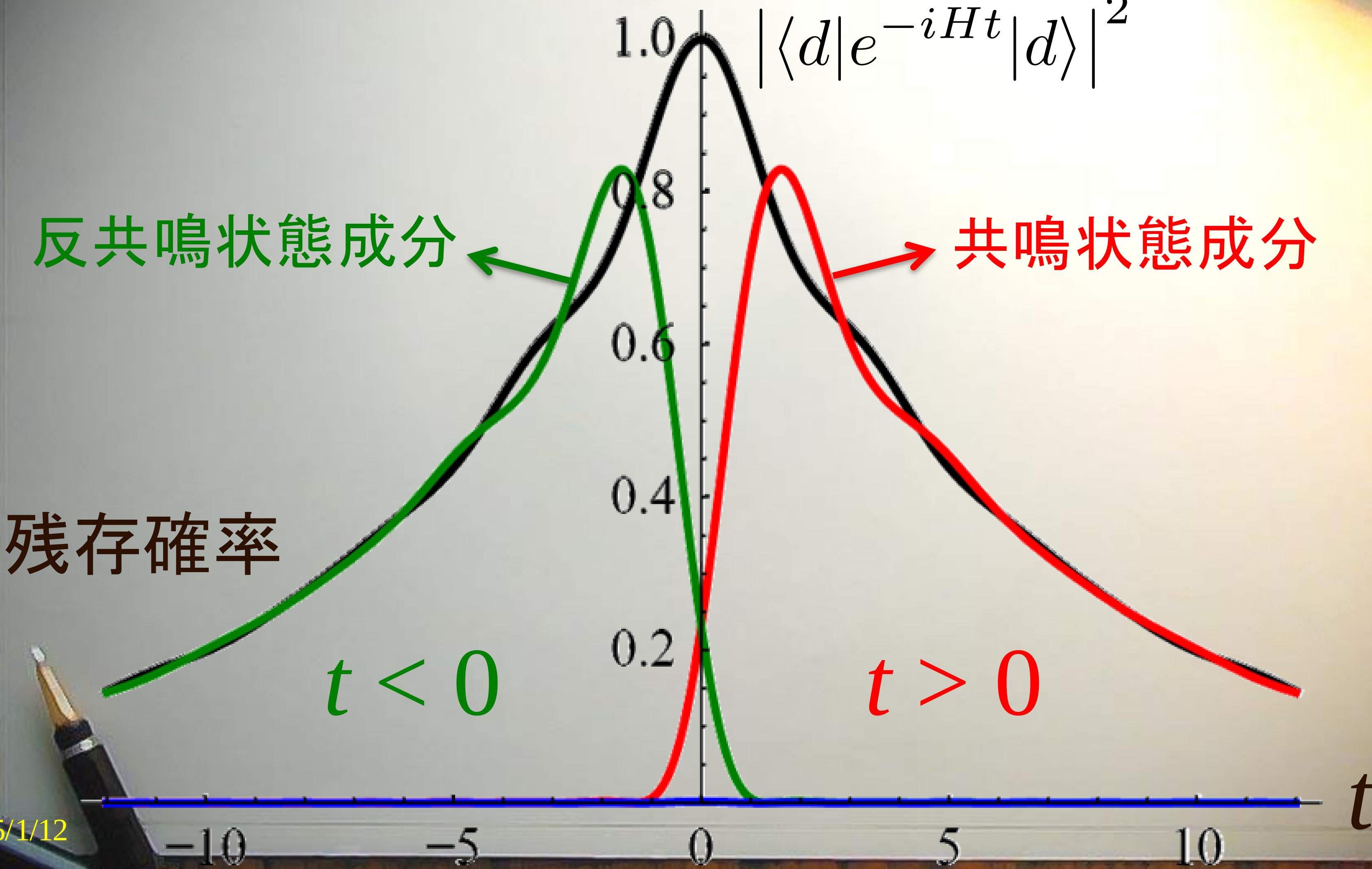




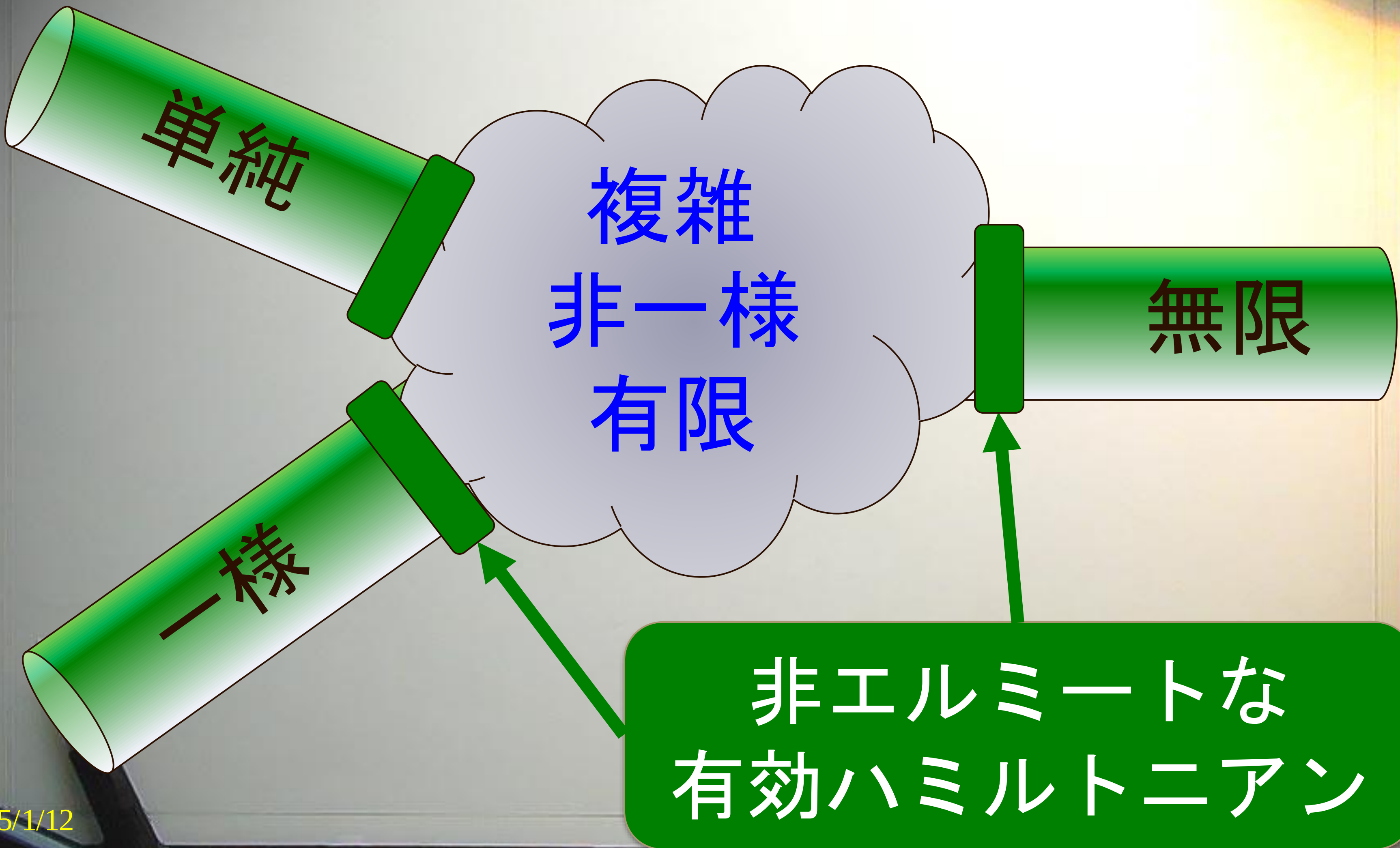
新しい議論



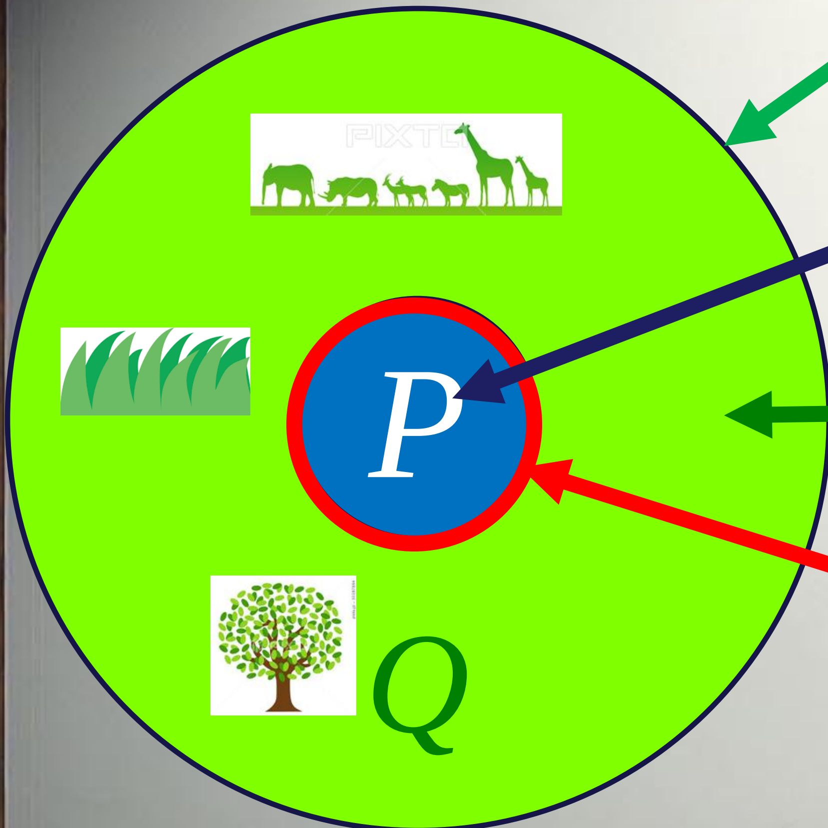
G. Ordonez, N. Hatano, J. Phys. A: Math. Theor. **50** (2017) 405304



Feshbach 形式



開放量子系



全系 H

注目系 PHP

環境系 QHQ

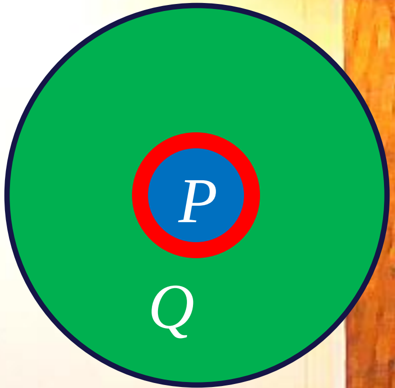
カップリング
$PHQ + QHP$

射影演算子

$$P + Q = 1 \qquad P^2 = P, \quad Q^2 = Q$$

Feshbach 形式

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \longrightarrow H_{\mathrm{eff}}P|\psi\rangle = EP|\psi\rangle$$



$$PH(P+Q)|\psi\rangle = EP|\psi\rangle$$

$$QH(P+Q)|\psi\rangle = EQ|\psi\rangle$$

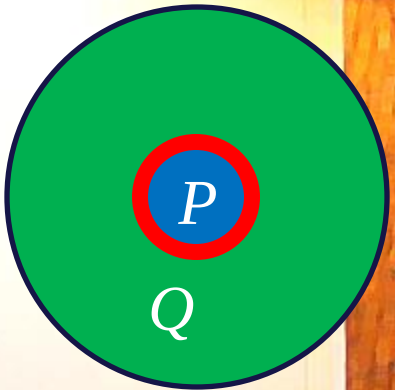
$$(PHP)P|\psi\rangle + (PHQ)Q|\psi\rangle = EP|\psi\rangle$$

$$(QHP)P|\psi\rangle + (QHQ)Q|\psi\rangle = EQ|\psi\rangle$$

$$Q|\psi\rangle = \frac{1}{E - QHQ}(QHP)P|\psi\rangle$$

Feshbach 形式

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \Longrightarrow H_{\mathrm{eff}} P|\psi\rangle = EP|\psi\rangle$$



$$(PHP)P|\psi\rangle + (PHQ)Q|\psi\rangle = EP|\psi\rangle$$

$$(QHP)P|\psi\rangle + (QHQ)Q|\psi\rangle = EQ|\psi\rangle$$

$$(PHP)P|\psi\rangle + (PHQ)\frac{1}{E-QHQ}(QHP)P|\psi\rangle = EP|\psi\rangle$$

$$H_{\mathrm{eff}} = PHP + PHQ\frac{1}{E-QHQ}QHP$$

Feshbach 形式

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \longrightarrow H_{\text{eff}} P|\psi\rangle = EP|\psi\rangle$$

無限自由度

遅延グリーン関数
（フーリエ変換: $t>0$）

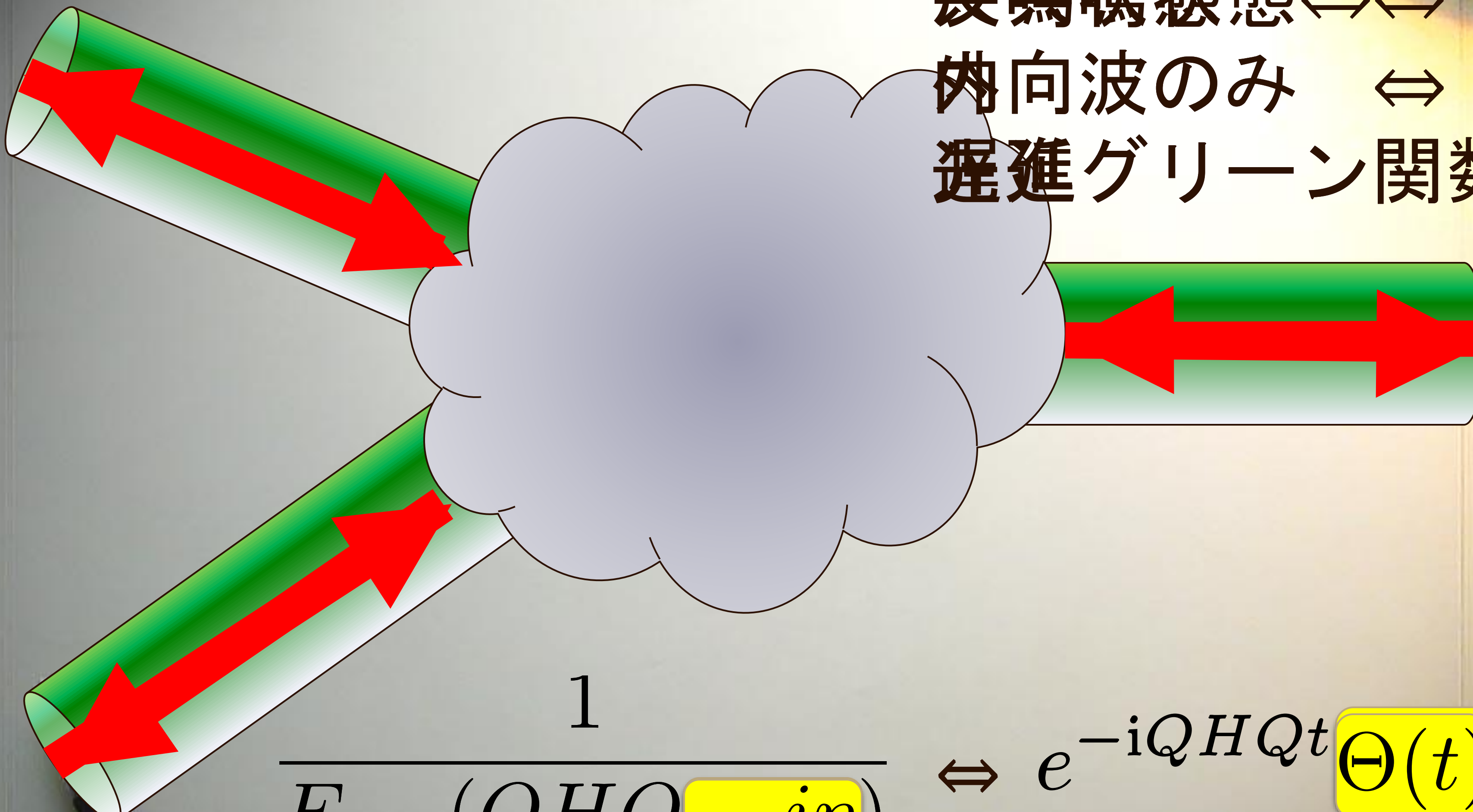
$$\frac{1}{E-(QHQ-i\eta)}$$

先進グリーン関数

$$1$$

$$H_{\text{eff}} = PHP + PHQ\frac{1}{E-QHQ}QHP$$

Feshbach 形式



共鳴状態⇔
長寿命状態⇔

外向波のみ ⇔
内向波のみ

遅延グリーン関数
先進グリーン関数

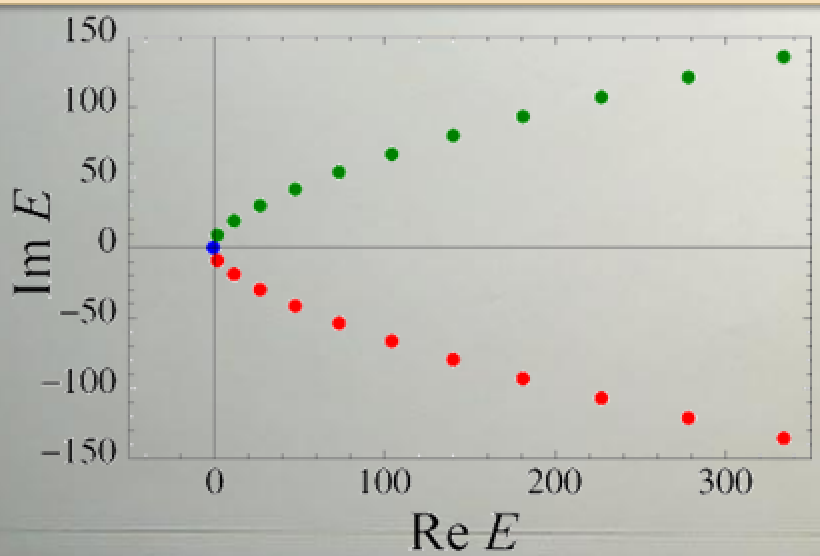
$$\frac{1}{E-(QHQ\boxed{-i\eta})} \Leftrightarrow e^{-\mathrm{i}QHQt}\boxed{\Theta(t)}$$

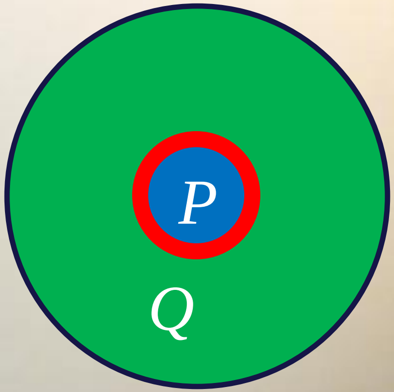
Feshbach 形式

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle \longrightarrow H_{\mathrm{eff}}P|\psi\rangle = EP|\psi\rangle$$

非エルミート・有効ハミルトニアン

$$H_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{R/A}} = PHP + PHQ\frac{1}{E-(QHQ\mp\mathrm{i}\eta)}QHP$$





Feshbach 形式

$$H\left|\psi\right\rangle = E\left|\psi\right\rangle \longrightarrow H_{\mathrm{eff}}P\left|\psi\right\rangle = EP\left|\psi\right\rangle$$

$$PH(P+Q)\left|\psi\right\rangle = EP\left|\psi\right\rangle$$

$$QH(P+Q)\left|\psi\right\rangle = EQ\left|\psi\right\rangle$$

$$(PHP)P\left|\psi\right\rangle + (PHQ)Q\left|\psi\right\rangle = EP\left|\psi\right\rangle$$

$$(QHP)P\left|\psi\right\rangle + (QHQ)Q\left|\psi\right\rangle = EQ\left|\psi\right\rangle$$

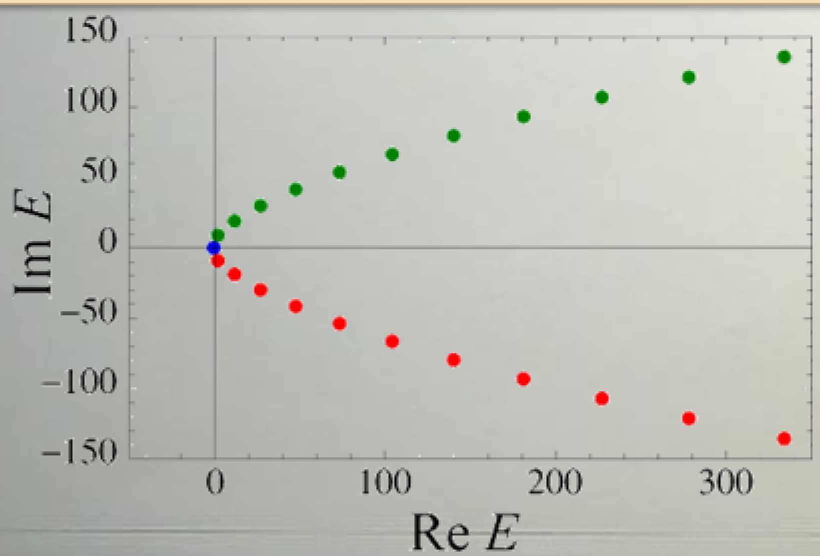
$$Q\left|\psi\right\rangle = \frac{1}{E - QHQ}(QHP)P\left|\psi\right\rangle$$

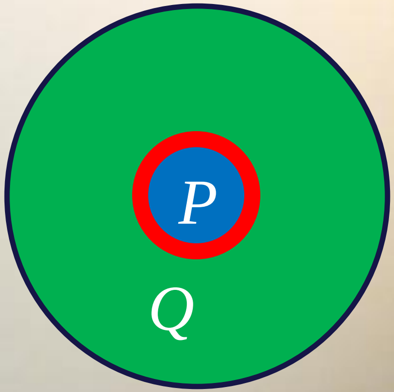
Feshbach 形式

$$H\,|\psi\rangle = E\,|\psi\rangle \longrightarrow H_{\mathrm{eff}} P\,|\psi\rangle = EP\,|\psi\rangle$$

非エルミート・有効ハミルトニアン

$$H_{\mathrm{eff}}^{\mathrm{R/A}} = PHP + PHQ \frac{1}{E-(QHQ\mp \mathrm{i}\eta)} QHP$$





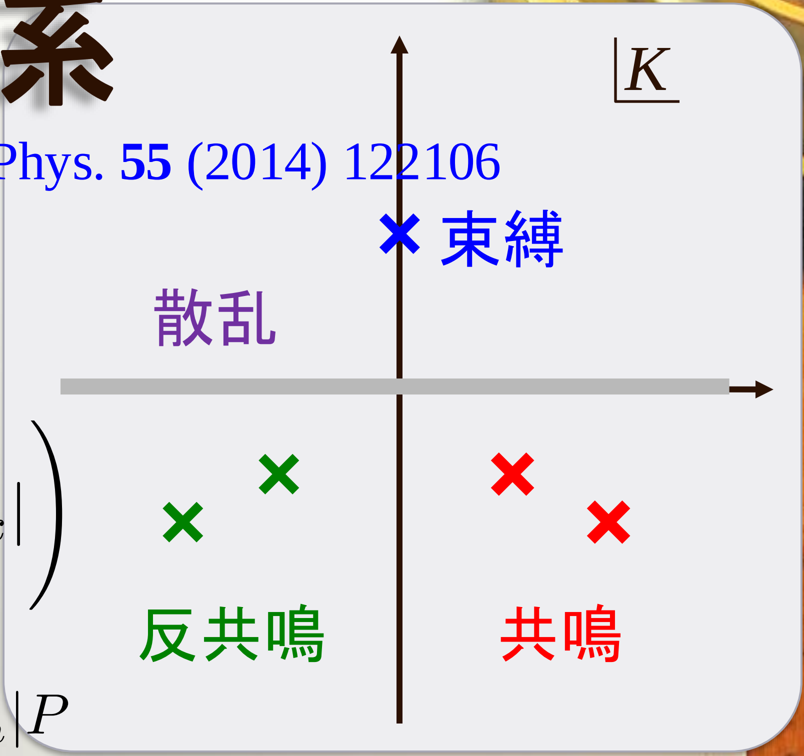
新しい完全系

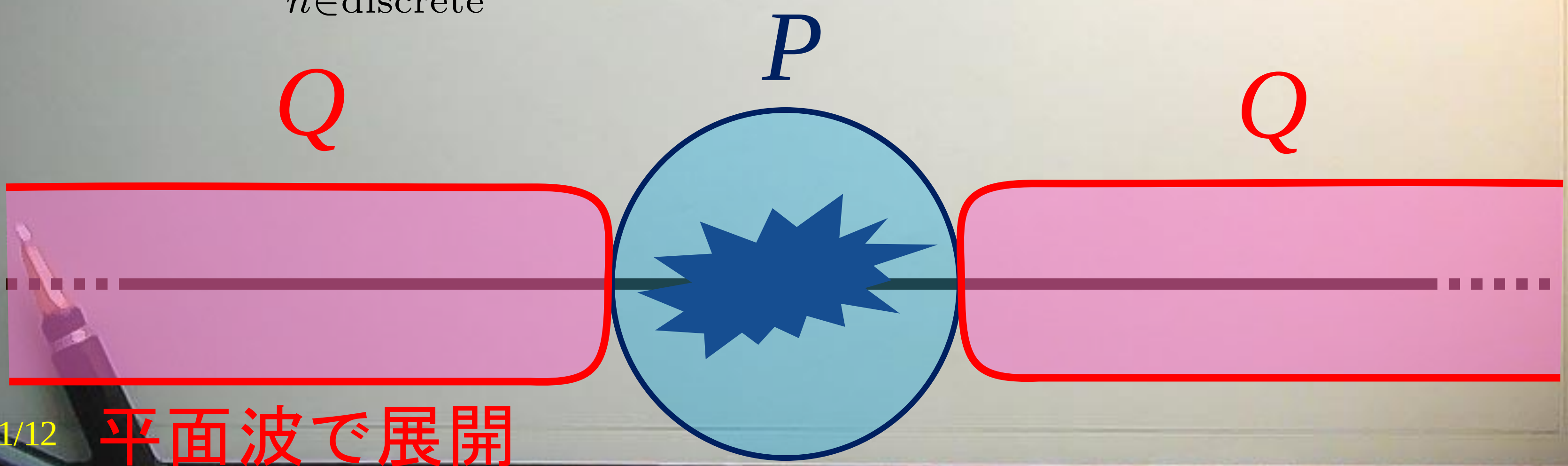
N. Hatano, G. Ordonez, J. Math. Phys. **55** (2014) 122106

$$P = \sum_{n \in \text{discrete}} P|\psi_n\rangle\langle\psi_n|P$$

$$\left(\text{cf.}\, I = \sum_{\text{bound}} |\psi_\text{b}\rangle\langle\psi_\text{b}| + \int dk |\psi_k\rangle\langle\psi_k|\right)$$

$$P\frac{1}{E-H}P = \sum_{n \in \text{discrete}} P|\psi_n\rangle\frac{1}{E-E_n}\langle\psi_n|P$$





平面波で展開

新しい完全系による

N. Hatano and G. Ordonez, J. Math. Phys. 55, 122106 (2014)

$$P\frac{1}{E-H}P = P\frac{1}{E-H_{\mathrm{eff}}(E)}P$$

$$H_{\mathrm{eff}} = PHP + PHQ\frac{1}{E-QHQ}QHP$$

$$P\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}P = \oint P\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}}{E-H}PdE$$

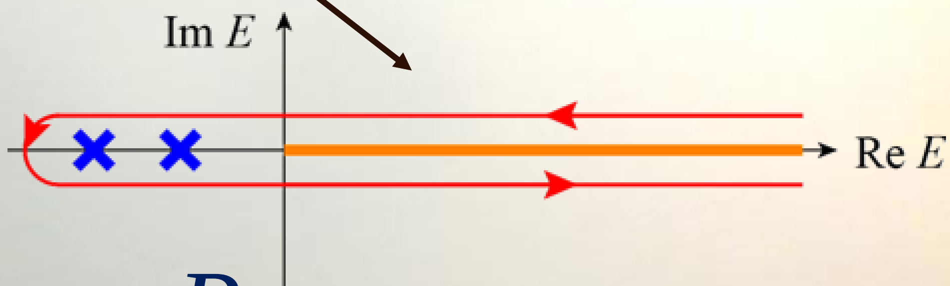
$$= \oint P\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et}}{E-H_{\mathrm{eff}}(E)}PdE$$

時間発展演算子

N. Hatano, G. Ordonez, J. Math. Phys. **55** (2014) 122106

$$Pe^{-iHt}P = \sum_{n\in\mathrm{discrete}} \int_C dE e^{-iEt} |\psi_n\rangle \frac{1}{E-E_n} \langle\tilde{\psi}_n|$$

分解されている



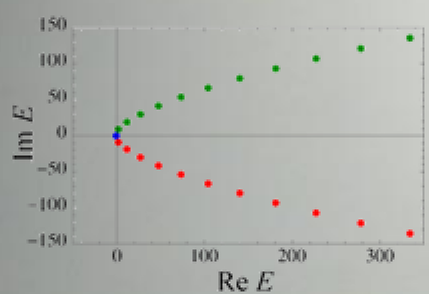
P

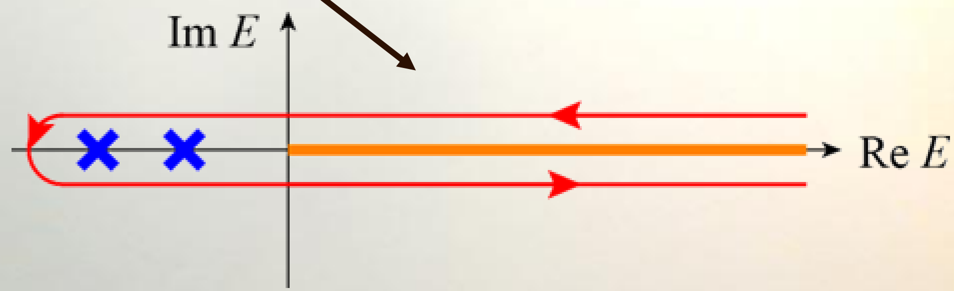
時間反転対称な形式

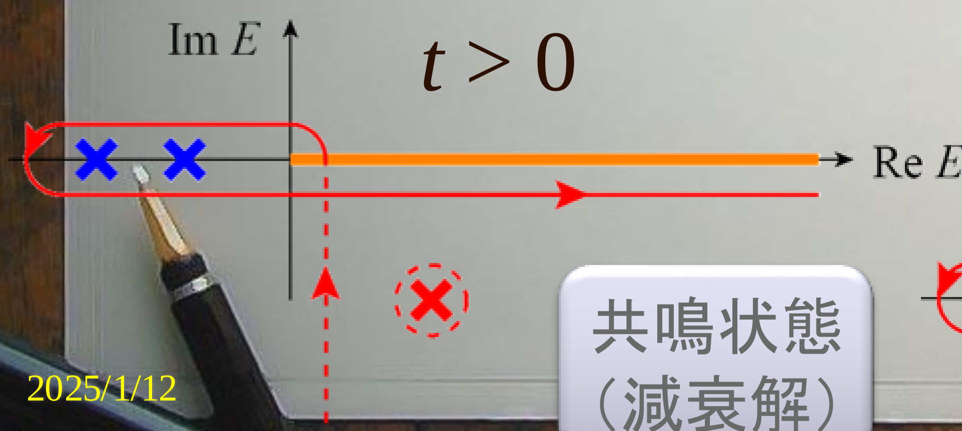
時間発展演算子

N. Hatano, G. Ordonez, J. Math. Phys. **55** (2014) 122106

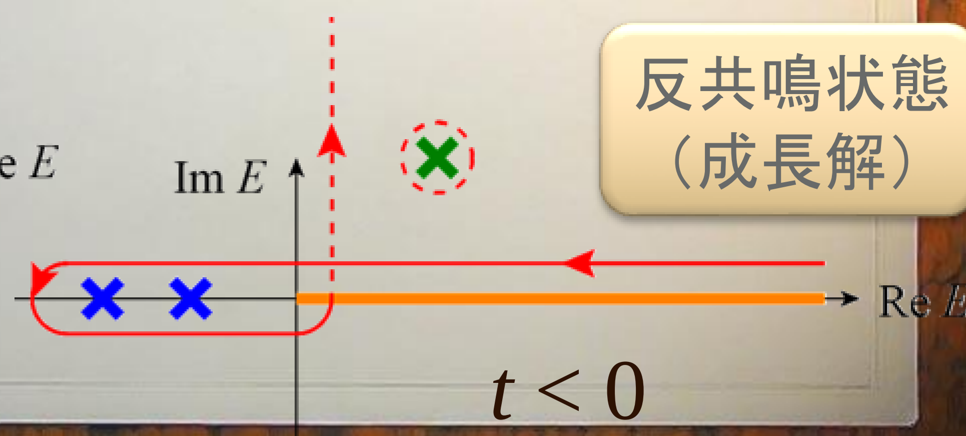
$$Pe^{-iHt}P = \sum_{n\in\mathrm{discrete}} \int_C dE e^{-iEt} |\psi_n\rangle \frac{1}{E-E_n} \langle\tilde{\psi}_n|$$







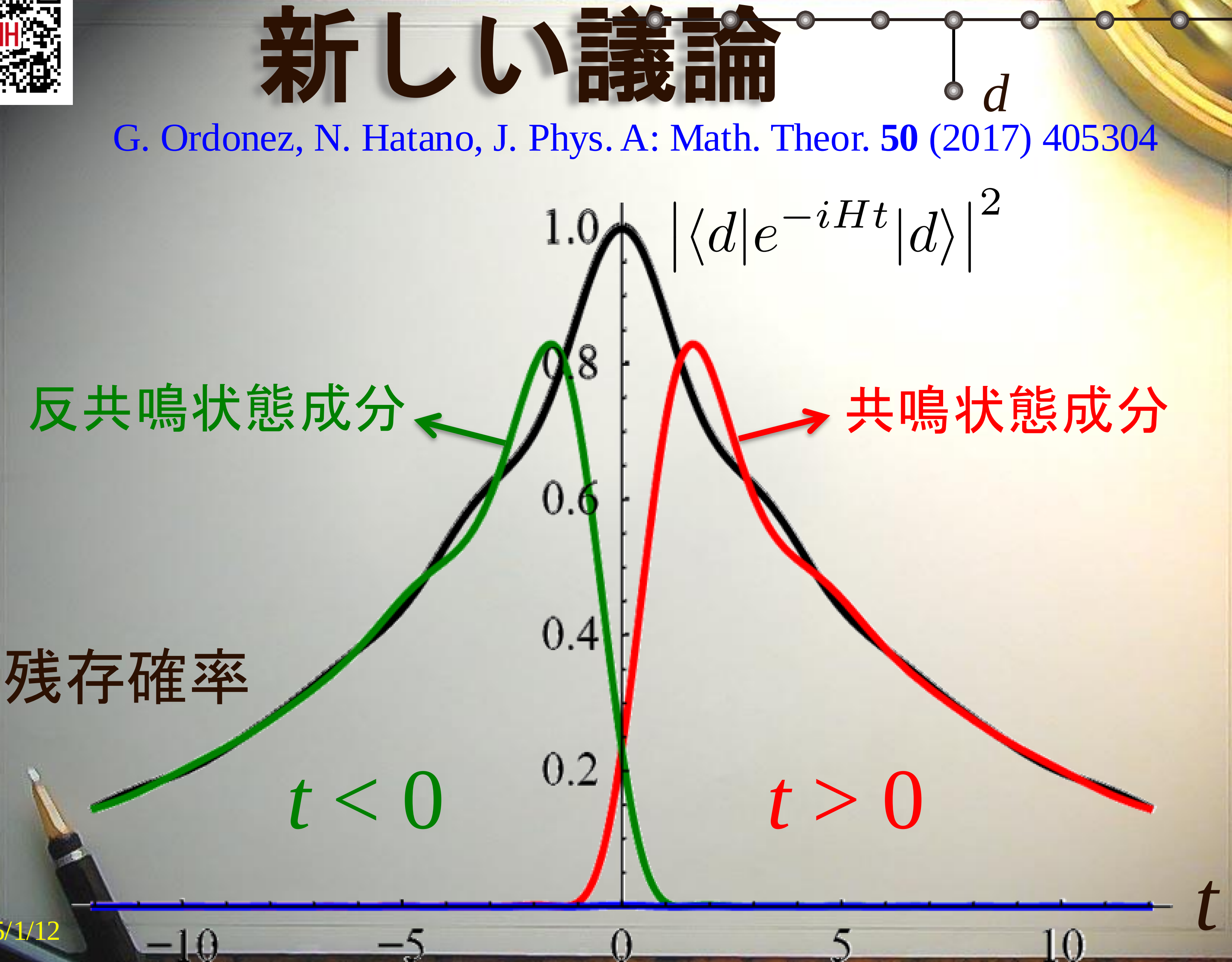
共鳴状態
（減衰解）



反共鳴状態
（成長解）

新しい議論

G. Ordonez, N. Hatano, J. Phys. A: Math. Theor. **50** (2017) 405304



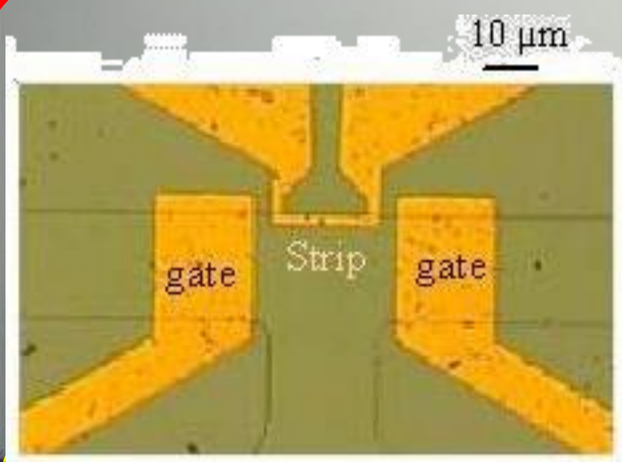
開放量子系のまとめ

- 開放量子系の共鳴状態の定義
- 共鳴状態についての数々の疑惑を晴らした
- 共鳴状態を使った完全系を導入
- 時間反転対称性を保った議論

N. Hatano, K. Sasada, H. Nakamura and T. Petrosky, Prog. Theor. Phys. **119** (2008) 187
N. Hatano, G. Ordonez, J. Math. Phys. **55** (2014) 122106
G. Ordonez, N. Hatano, J. Phys. A: Math. Theor. **50** (2017) 405304

フォン・ノイマン方程式への拡張

一体純粋状態の時間発展
→シュレディンガー方程式



多体混合状態の時間発展
→フォン・ノイマン方程式

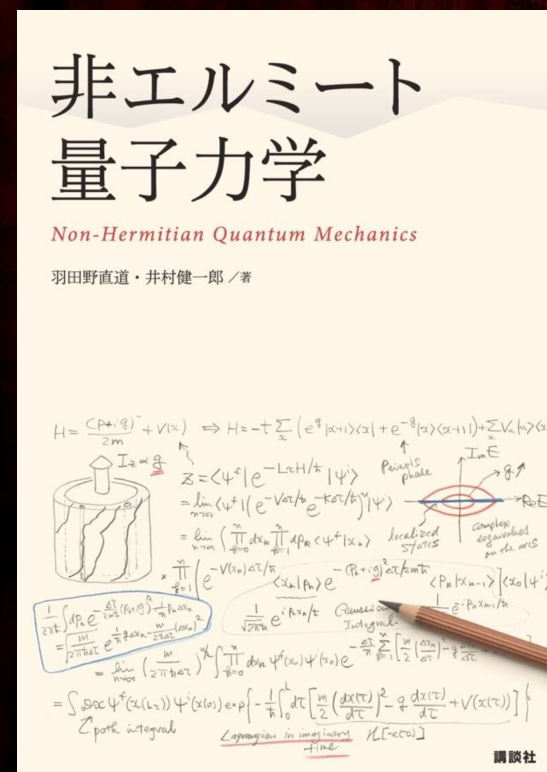
$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho = [H, \rho] =: \mathcal{L}\rho$$

非エルミート量子力学

現在・過去・未来

羽田野直道（東大生研）

現在：開放量子系の
非エルミート性
過去：非エルミート
Hatano-Nelson模型
未来：開放量子系の
非マルコフ性



「非エルミート量子力学」

VOLUME 77, NUMBER 3 PHYSICAL REVIEW LETTERS 15 JULY 1996

Localization Transitions in Non-Hermitian Quantum Mechanics

Naomichi Hatano* and David R. Nelson
Lyman Laboratory of Physics, Harvard University, Cambridge, Massachusetts 02138
(Received 15 March 1996)

We study the localization transitions which arise in both one and two dimensions when quantum mechanical particles described by a random Schrödinger equation are subjected to a constant imaginary vector potential. A path-integral formulation relates the transition to flux lines depinned from columnar defects by a transverse magnetic field in superconductors. The theory predicts that, close to the depinning transition, the transverse Meissner effect is accompanied by stretched exponential relaxation of the field into the bulk and a diverging penetration depth. [S0031-9007(96)00677-1]

初めて「非エルミート量子力学」という言葉をタイトルに使った論文（おそらく）

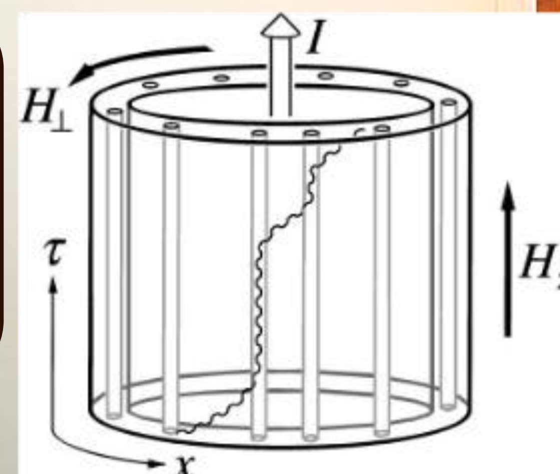


FIG. 1. One flux line (wavy curve) induced by the field H_z and interacting with columnar pins in a cylindrical superconducting shell with radial thickness smaller than the penetration depth of the defect-free material. The field $H_\perp$ is generated by the current I threading the ring.

引用 1511 件 （2025年1月12日現在、Google Scholar による）

フロンティア精神

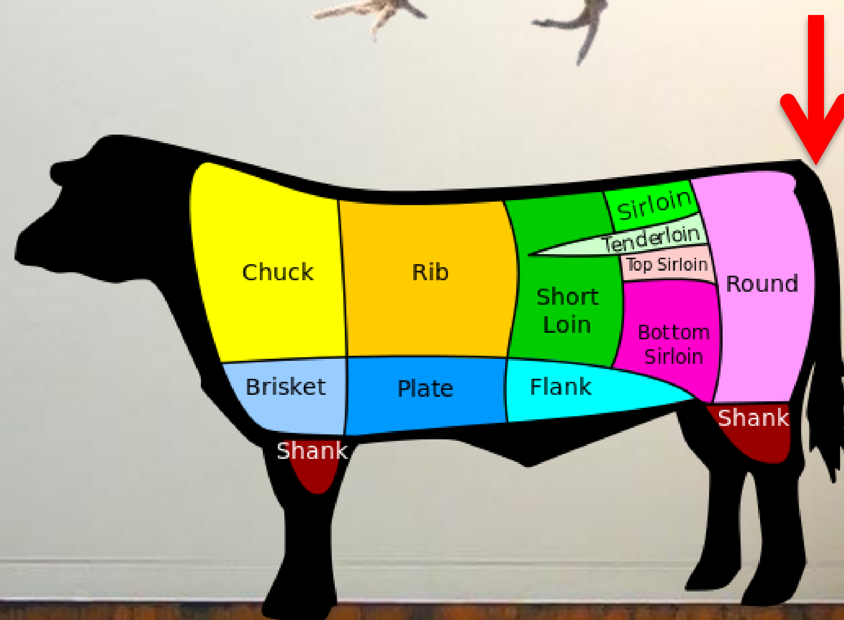
HARVARD
Department of Physics

新しい分野を拓く研究を目指している

→新しい問題の提案を

寧為鶏口、無為牛後（史記）

和達三樹先生
（故人）



新しいものを見たとき

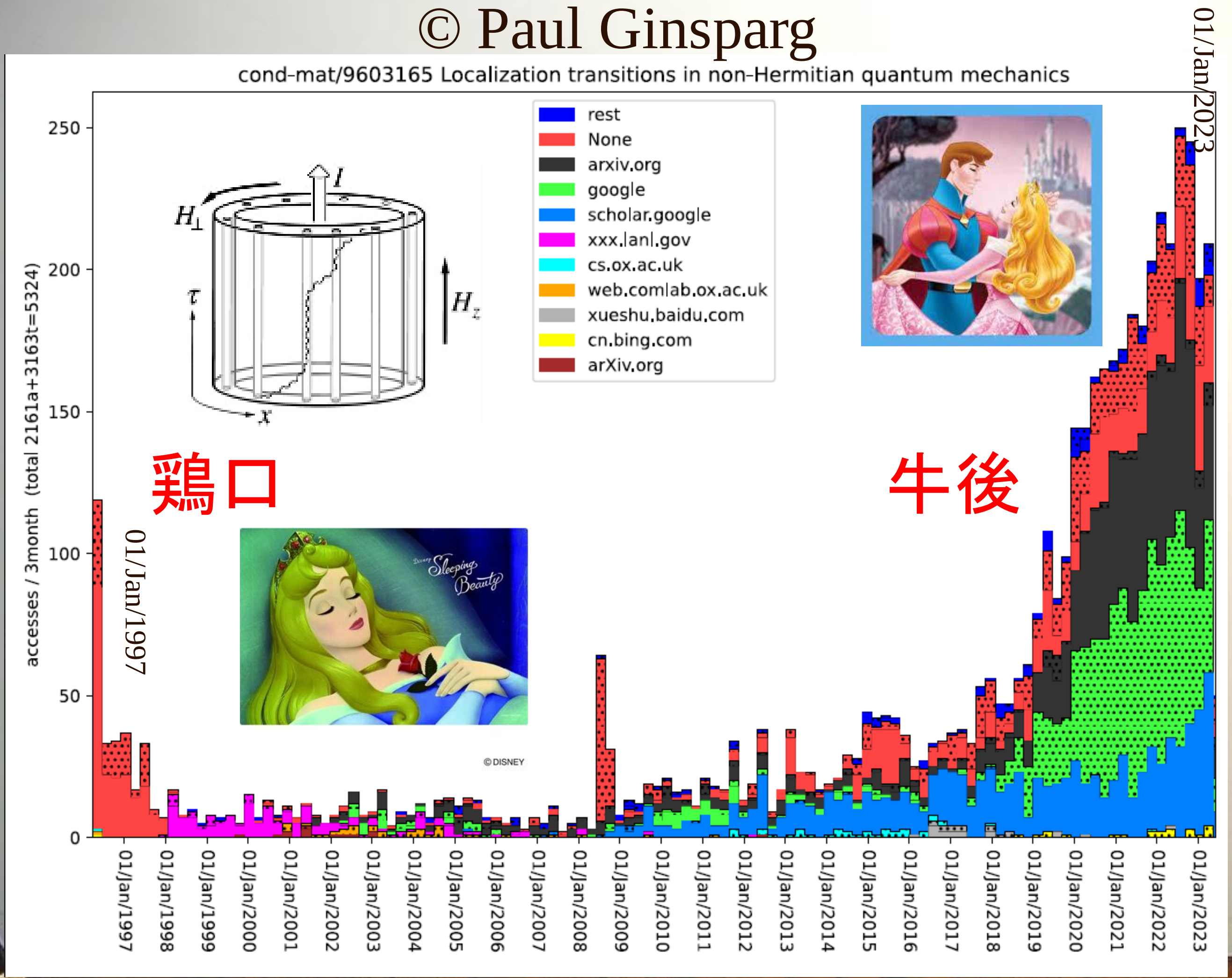
へんだぞ

面白そうだけど、みんながどう思うか様子を見よう。

引用件数の増加

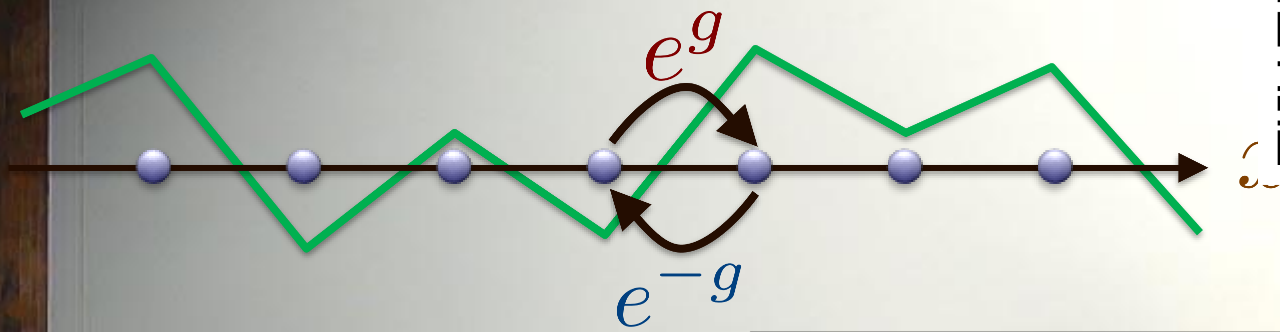
我々の1996年のarXivプレプリントのダウンロード数

© Paul Ginsparg

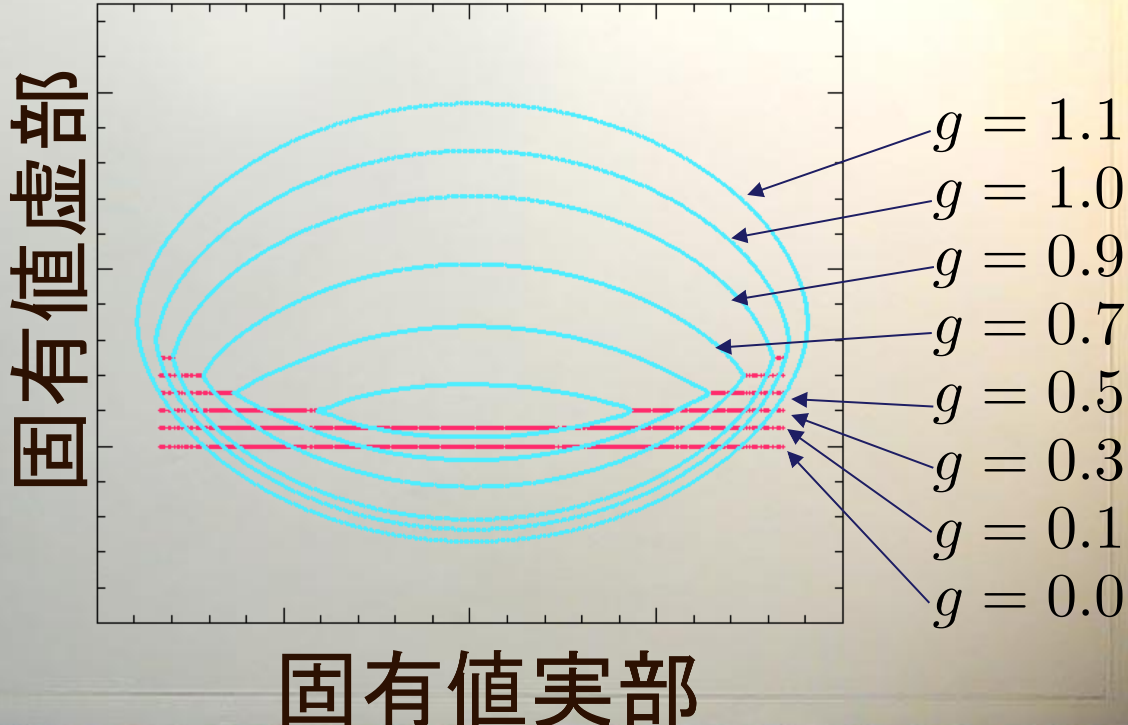


Hatano-Nelson 模型

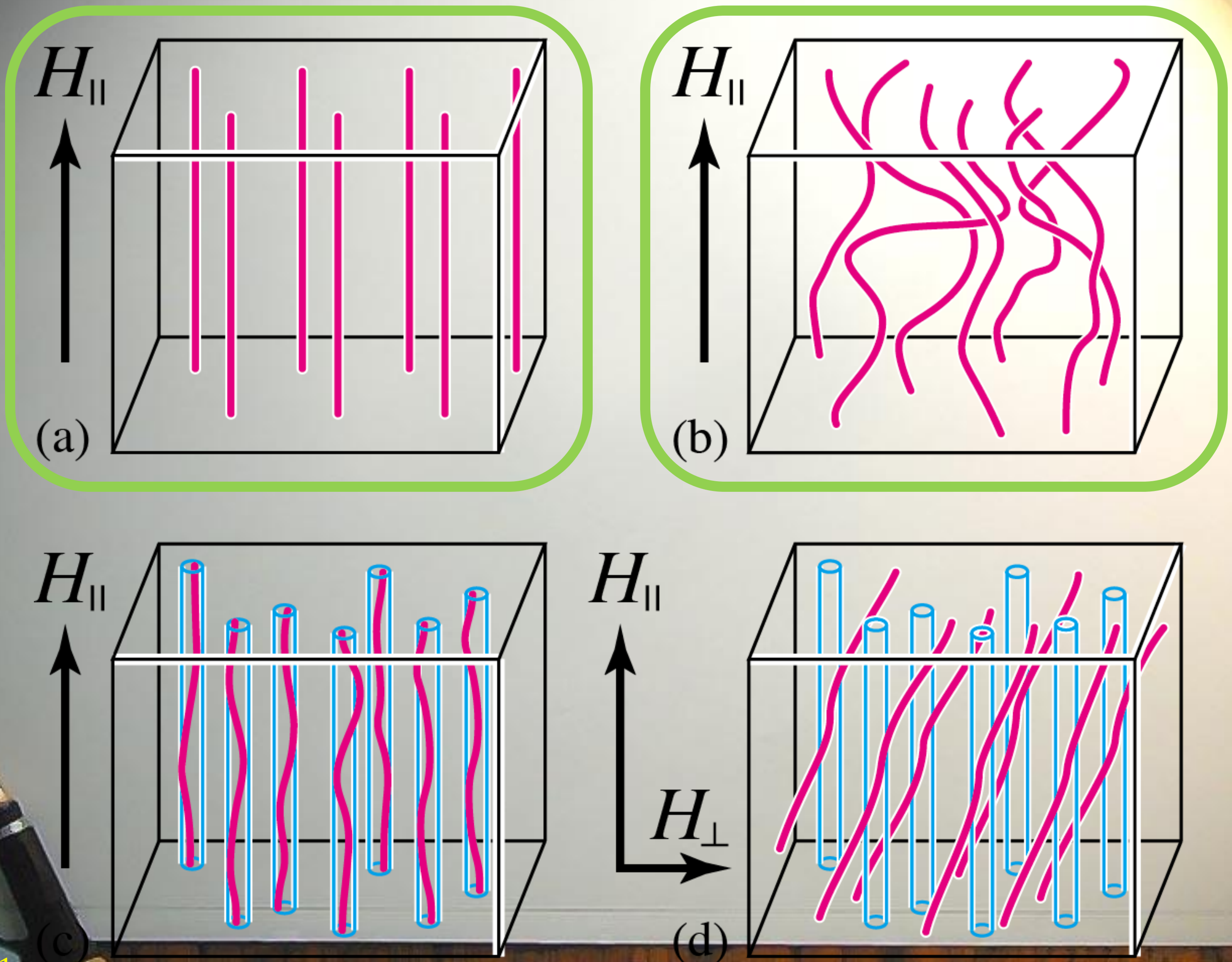
N. Hatano and D.R. Nelson, PRL 77 (1996) 570



ランダムポテンシャルと非対称ホッピングの競合

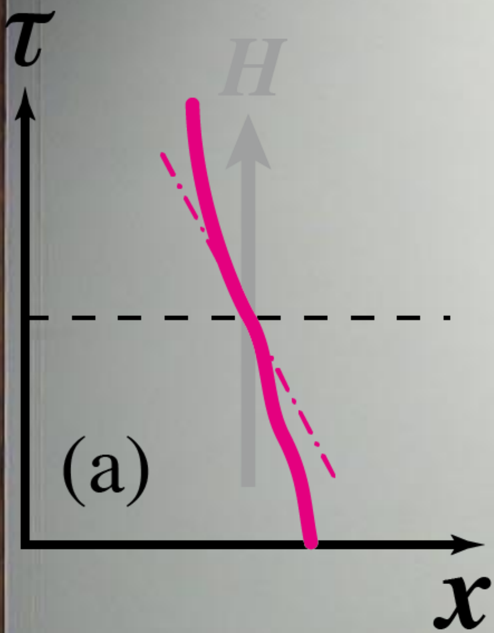


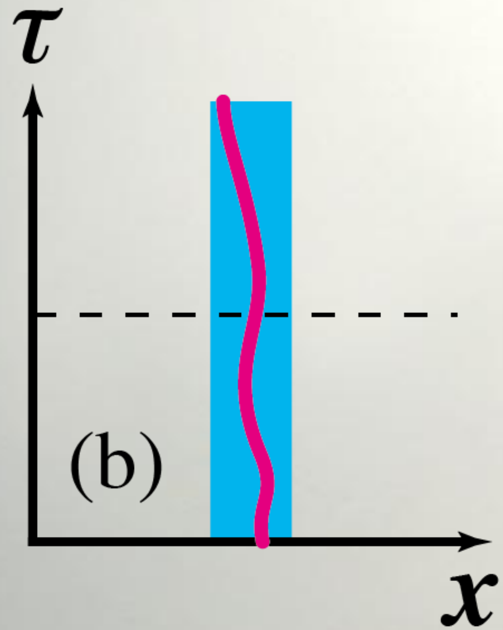
超伝導体中の磁束線

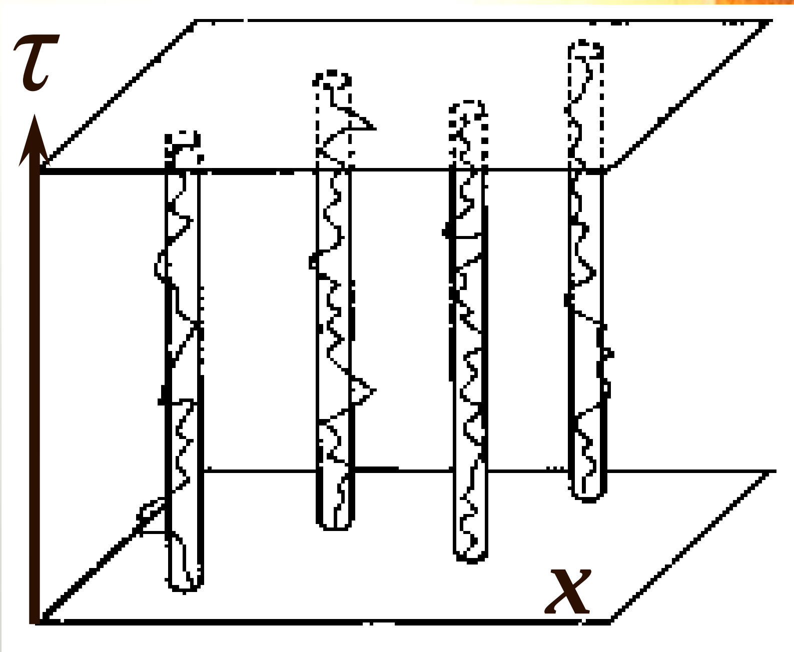


磁束線の古典統計力学模型

D.R. Nelson and V.M. Vinokur, PRB 48, 13060 (1993)







$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{x_i}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 \qquad V_1(\mathbf{x_i}(\tau)) \qquad V_2(\mathbf{x}_i(\tau)-\mathbf{x}_j(\tau))$$

ランダム
ポテンシャル

相互作用
ポテンシャル

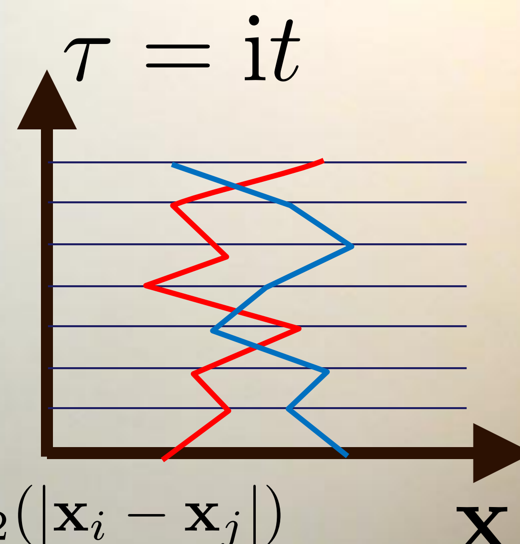
磁束線の古典統計力学模型

D.R. Nelson and V.M. Vinokur, PRB 48, 13060 (1993)

$$Z = \prod_i \int \mathcal{D}\mathbf{x}_i(\tau) \exp\left[-\beta \int \mathrm{d}\tau E[\{\mathbf{x}_i(\tau)\}]\right]$$

$$E[\{\mathbf{x}_i(\tau)\}] = \sum_i \left[\frac{m}{2}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_i}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + V_1(\mathbf{x}_i)\right] + \sum_{i<j} V_2(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)$$

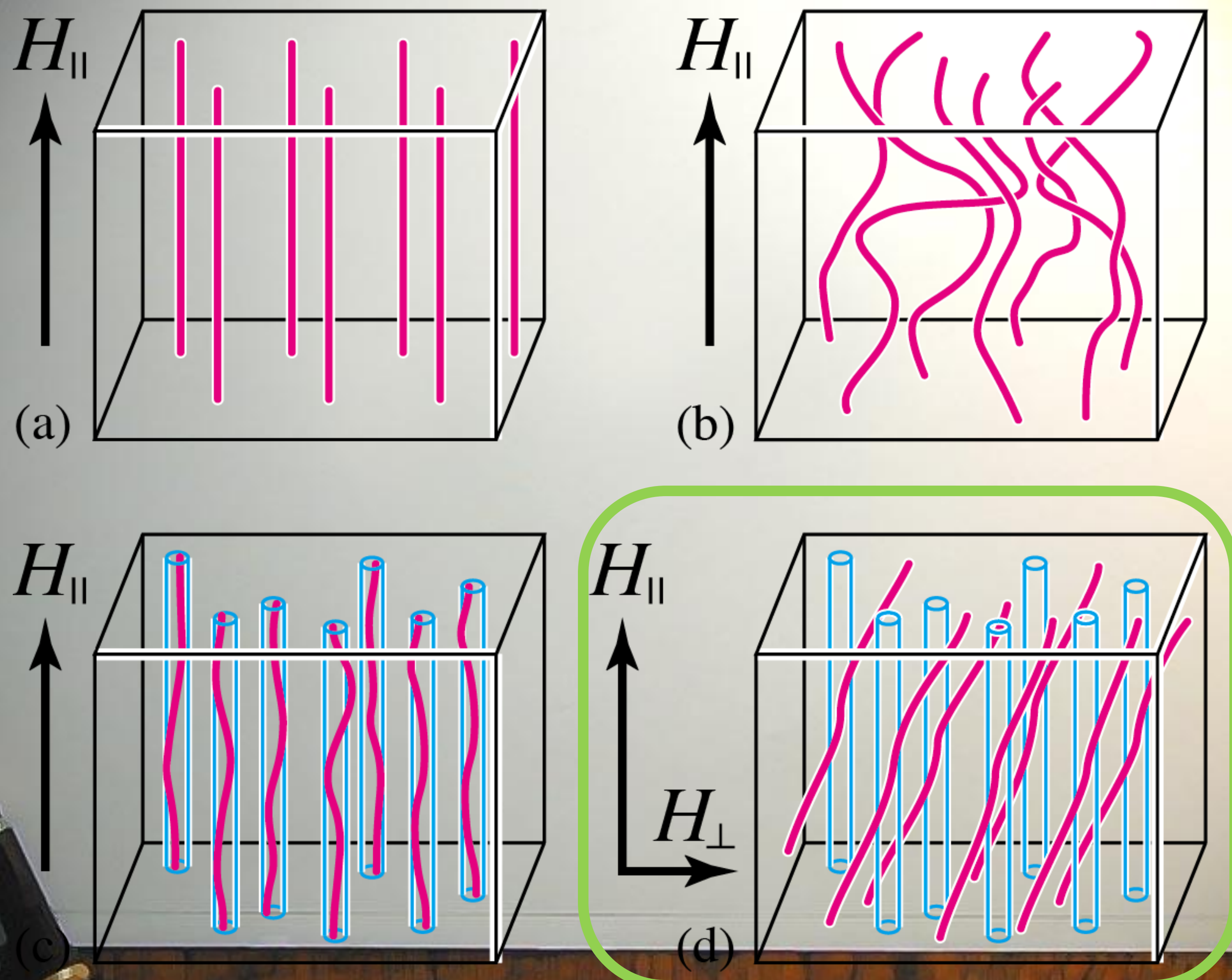
経路積分変換



$$Z = \mathrm{Tr}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht/\hbar}$$

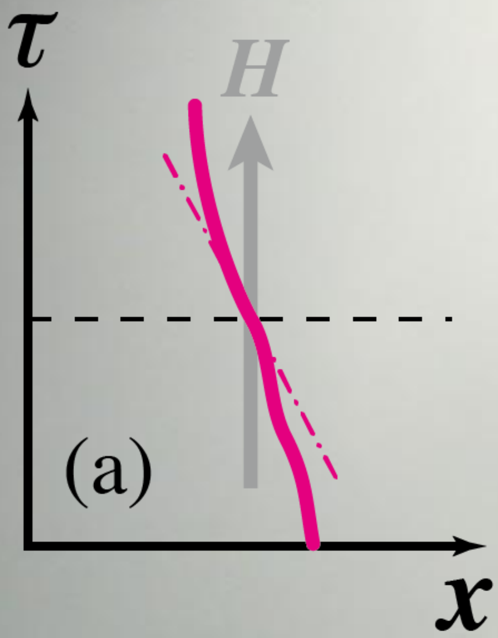
$$H = \sum_i \left[\frac{\mathbf{p}_i{}^2}{2m} + V_1(\mathbf{x}_i)\right] + \sum_{i<j} V_2(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)$$

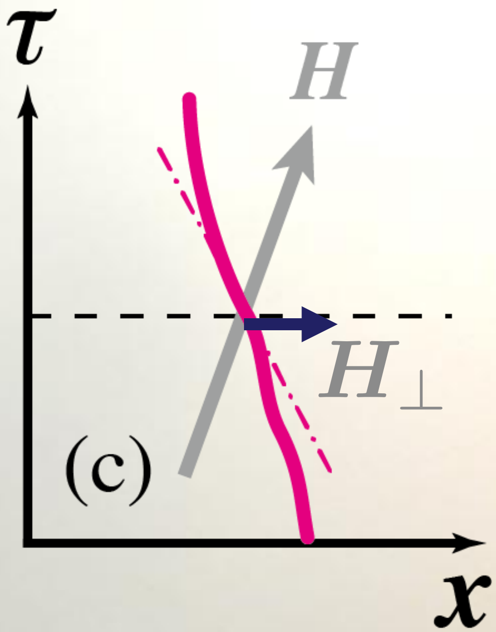
超伝導体中の磁束線



傾いた磁束線の
古典統計力学模型

D.R. Nelson, private communication





$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{x_i}(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)^2$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_i(\tau)}{\mathrm{d}\tau}-\mathbf{v}_0\right)^2$$

$$\mathbf{v}_0 \propto \boldsymbol{H}_\perp$$

傾いた磁束線の有効模型

D.R. Nelson, private communication

$$E[\{\mathbf{x}_i(\tau)\}] = \sum_i \left[\frac{m}{2} \left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}_i}{\mathrm{d}\tau} - \mathbf{v}_0 \right)^2 + V_1(\mathbf{x}_i) \right] + \sum_{i<j} V_2(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)$$

ランダムポテンシャル

相互作用ポテンシャル

経路積分変換

$$\mathbf{g} \propto \mathbf{v}_0 \propto \boldsymbol{H}_\perp$$

$$H = \sum_i \left[\frac{(\mathbf{p}_i - \mathrm{i}\mathbf{g})^2}{2m} + V_1(\mathbf{x}_i) \right] + \sum_{i<j} V_2(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|)$$

See Appendix of N. Hatano, Physica A 254 (1998) 317

傾いた磁束線の有効模型

D.R. Nelson, private communication

$$H=\sum_i\left[\frac{(\mathbf{p}_i-\mathrm{i}\mathbf{g})^2}{2m}+V_1(\mathbf{x}_i)\right]+\sum_{i<j}V_2(|\mathbf{x}_i-\mathbf{x}_j|)$$

格子模型の導入

$$H=-\sum_x\left[(t+w)b_{x+1}^\dagger b_x+(t-w)b_x^\dagger b_{x+1}\right]$$

$$+\sum_x V_x b_x^\dagger b_x+\sum_x U_x b_x^\dagger b_x b_{x+1}^\dagger b_{x+1}$$

ランダム
ポテンシャル

相互作用
ポテンシャル

私の寄与は

1.　相互作用を諦める！
→ 最も単純で非自明な模型
→ 数値対角化が容易

$$H = -\sum_x \left[(t+w) b^\dagger_{x+1} b_x + (t-w) b^\dagger_x b_{x+1} \right] + \sum_x V_x b^\dagger_x b_x + \sum_x U_x b^\dagger_x b_x b^\dagger_{x+1} b_{x+1}$$

ランダムポテンシャル　　相互作用ポテンシャル

長さ1000の系の全ての固有値を数分（当時）で求められる。

私の寄与は

2.　虚数ベクトルポテンシャル

→ 指数関数の形の係数

→ アンダーソン局在との対応

虚数ベクトルポテンシャル

$$H = -\sum_x \left[e^{+g} b_{x+1}^\dagger b_x + e^{-g} b_x^\dagger b_{x+1} \right] + \sum_x V_x b_x^\dagger b_x$$

ランダム
ポテンシャル

固有値の変化が固有関数の局在長の情報を与える。

虚数ベクトルポテンシャル

ベクトルポテンシャル

$$H = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m}$$

パイエルス位相

$$H = -\sum_x \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}eA} b_{x+1}^\dagger b_x + \mathrm{e}^{\mathrm{i}eA} b_x^\dagger b_{x+1} \right]$$

虚数ベクトルポテンシャル

$$H = \frac{(\mathbf{p} - \mathrm{i}\mathbf{g})^2}{2m}$$

虚数パイエルス位相

$$H = -\sum_x \left[\mathrm{e}^{+g} b_{x+1}^\dagger b_x + \mathrm{e}^{-g} b_x^\dagger b_{x+1} \right]$$

ゲージ変換：A を消す

$$H_A = -\sum_x \left[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}eA} b_{x+1}^\dagger b_x + \mathrm{e}^{\mathrm{i}eA} b_x^\dagger b_{x+1} \right] + \sum_x V_x b_x^\dagger b_x$$

$$A = 0 :\ H_0 \psi_0 = E_0 \psi_0$$

$$\Downarrow$$

$$A \neq 0 :\ H_A \psi_A = E_A \psi_A$$

$$\psi_A = \psi_0 e^{ieAx};\ E_A = E_0$$

虚数ゲージ変換：g を消せる？

$$H_g = -\sum_i \left[\mathrm{e}^{+g} b_{x+1}^\dagger b_x + \mathrm{e}^{-g} b_x^\dagger b_{x+1} \right] + \sum_x V_x b_x^\dagger b_x$$

$$g = 0:\ H_0 \psi_0 = E_0 \psi_0$$

$$\Downarrow$$

本当？？

$$g \neq 0:\ H_g \psi_g = E_g \psi_g$$

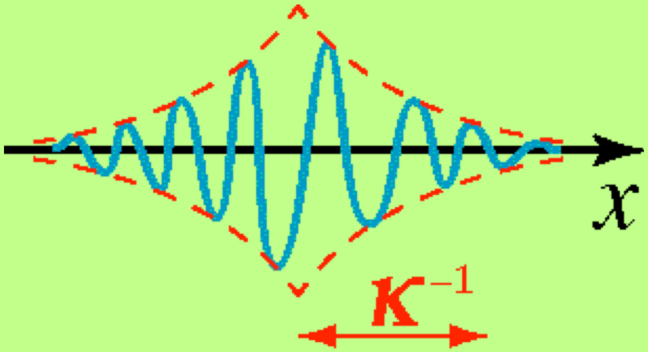
$$\psi_g = \psi_0 e^{gx};\ E_g = E_0$$

アンダーソン局在（一次元）

全状態がランダムポテンシャル中で局在

$$\psi_0 \sim e^{-\kappa|x|}$$

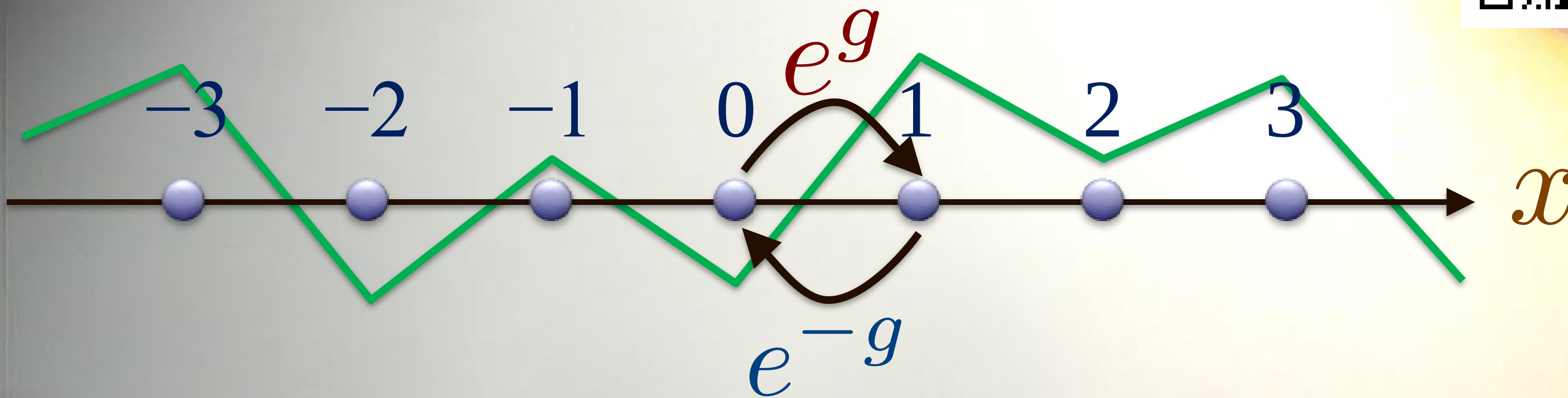
局在長逆数



$V(x)$: （実）ランダムスカラーポテンシャル

Hatano-Nelson 模型

N. Hatano and D.R. Nelson, PRL 77 (1996) 570



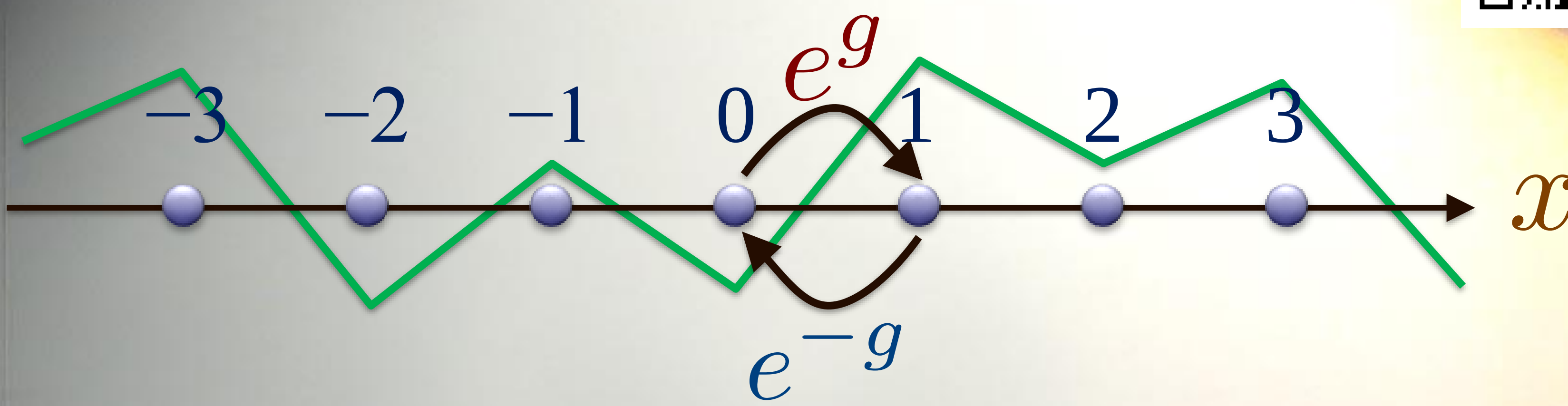
非対称ホッピング

$$H_g = -\frac{t}{2}\sum_x \left(e^{g} c^\dagger_{x+1} c_x + e^{-g} c^\dagger_x c_{x+1}\right) + \sum_x V_x c^\dagger_x c_x$$

実ランダム
ポテンシャル

Hatano-Nelson 模型

N. Hatano and D.R. Nelson, PRL 77 (1996) 570



ランダムネス κ
→ 局在効果
非対称ホッピング g
→ 非局在効果

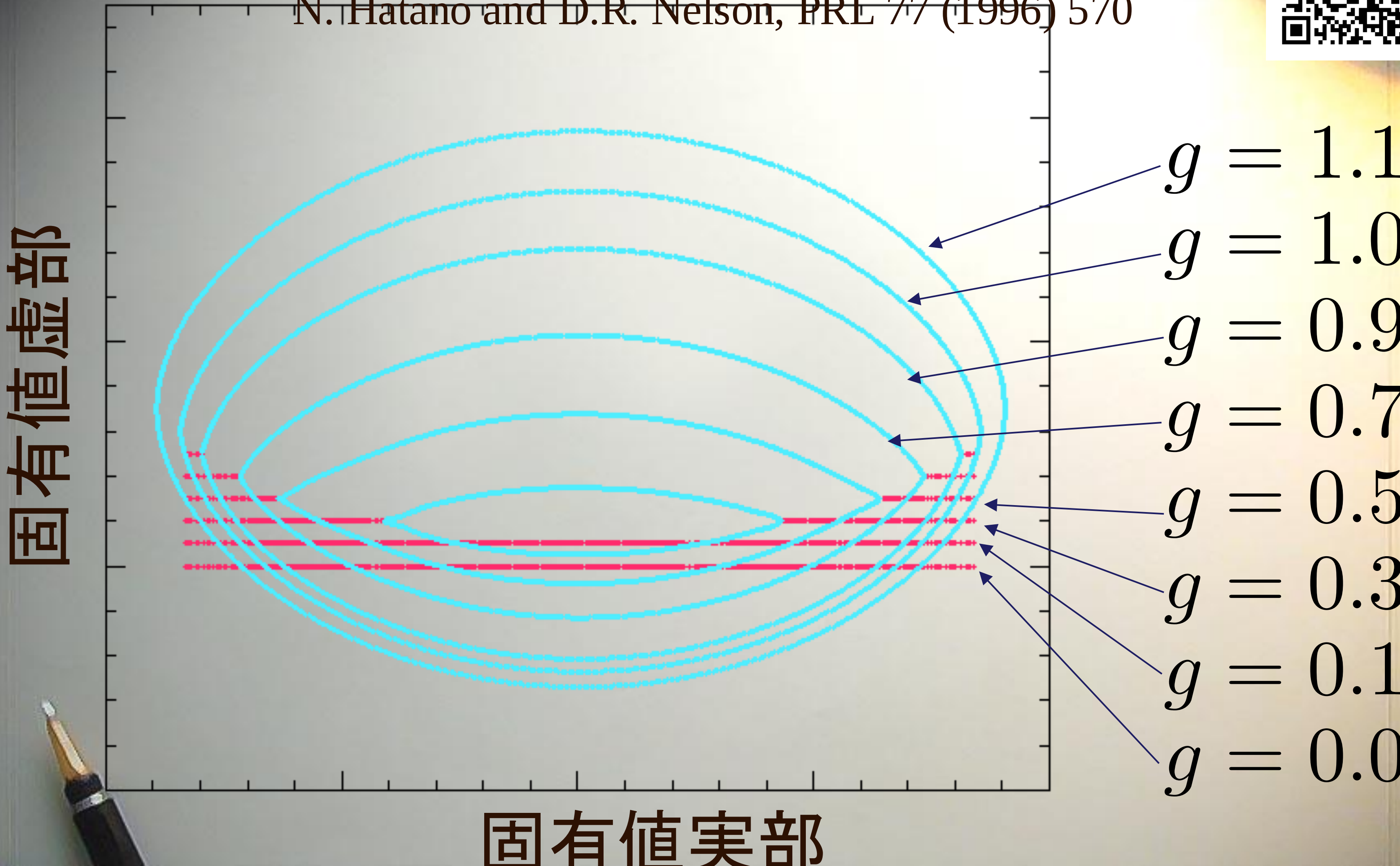
Hatano-Nelson 模型

N. Hatano and D.R. Nelson, PRL 77 (1996) 570

$$H = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & & e^{g} \\ \ddots & V_{-1} & e^{-g} & & & & \\ & e^{g} & V_0 & e^{-g} & & & \\ & & e^{g} & V_1 & e^{-g} & & \\ & & & e^{g} & V_2 & \ddots & \\ e^{-g} & & & & \ddots & \ddots & \end{pmatrix}$$

複素固有値転移

N. Hatano and D.R. Nelson, PRL 77 (1996) 570

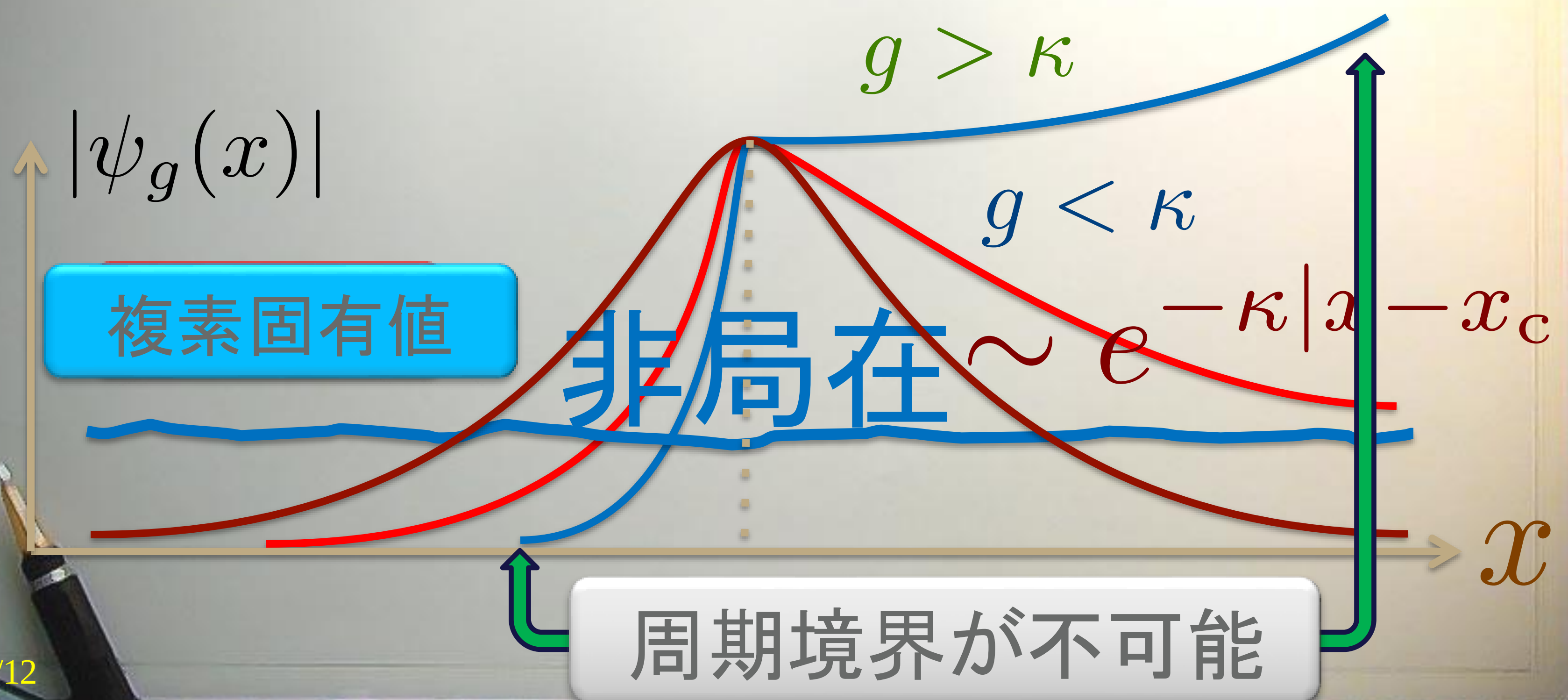


$V_x \in [-1, 1]$　1000 サイト 周期境界条件

虚数ゲージ変換

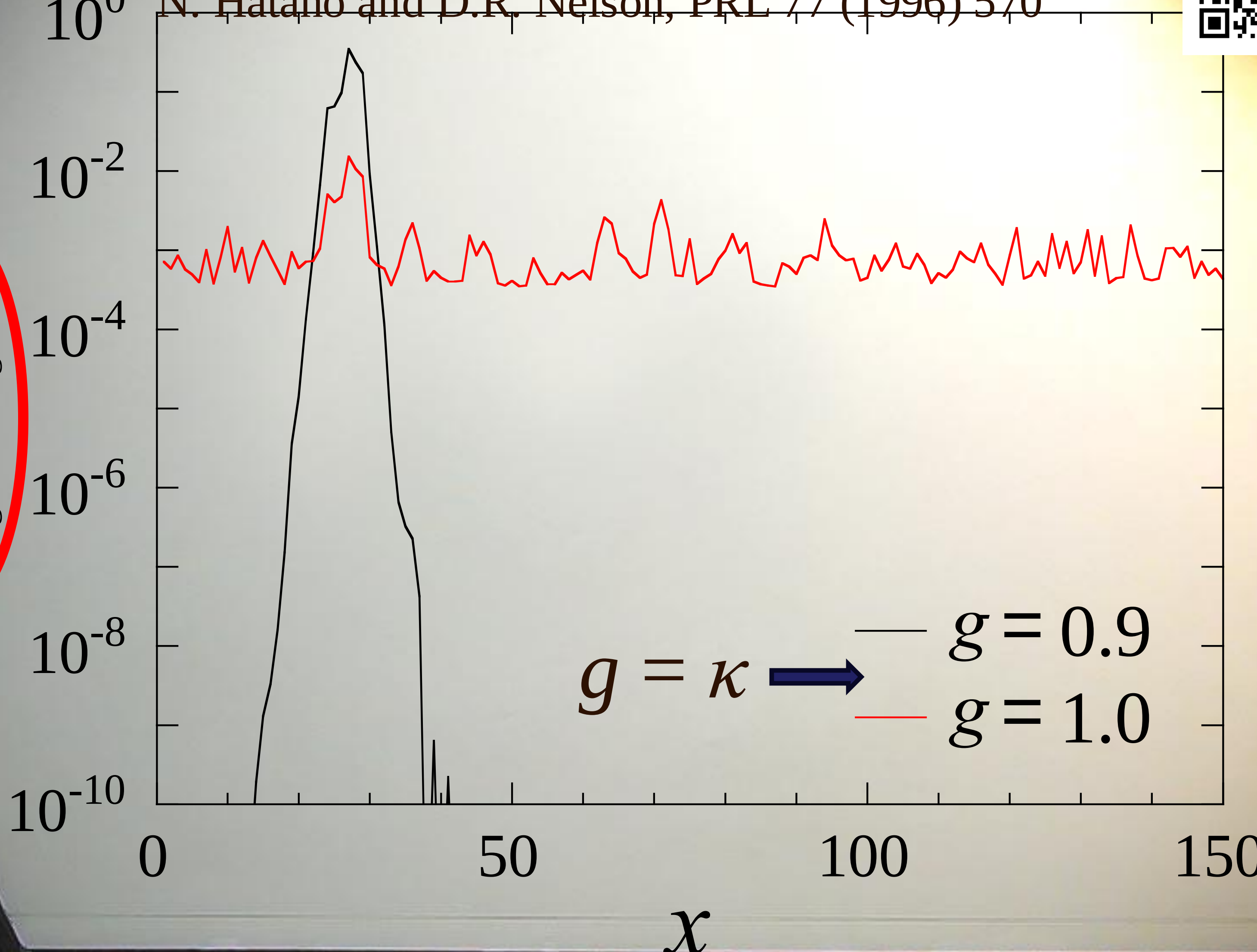
N. Hatano and D.R. Nelson, PRL 77 (1996) 570

$$\psi_0(x) \longrightarrow \psi_g(x) = \psi_0(x)e^{gx}$$



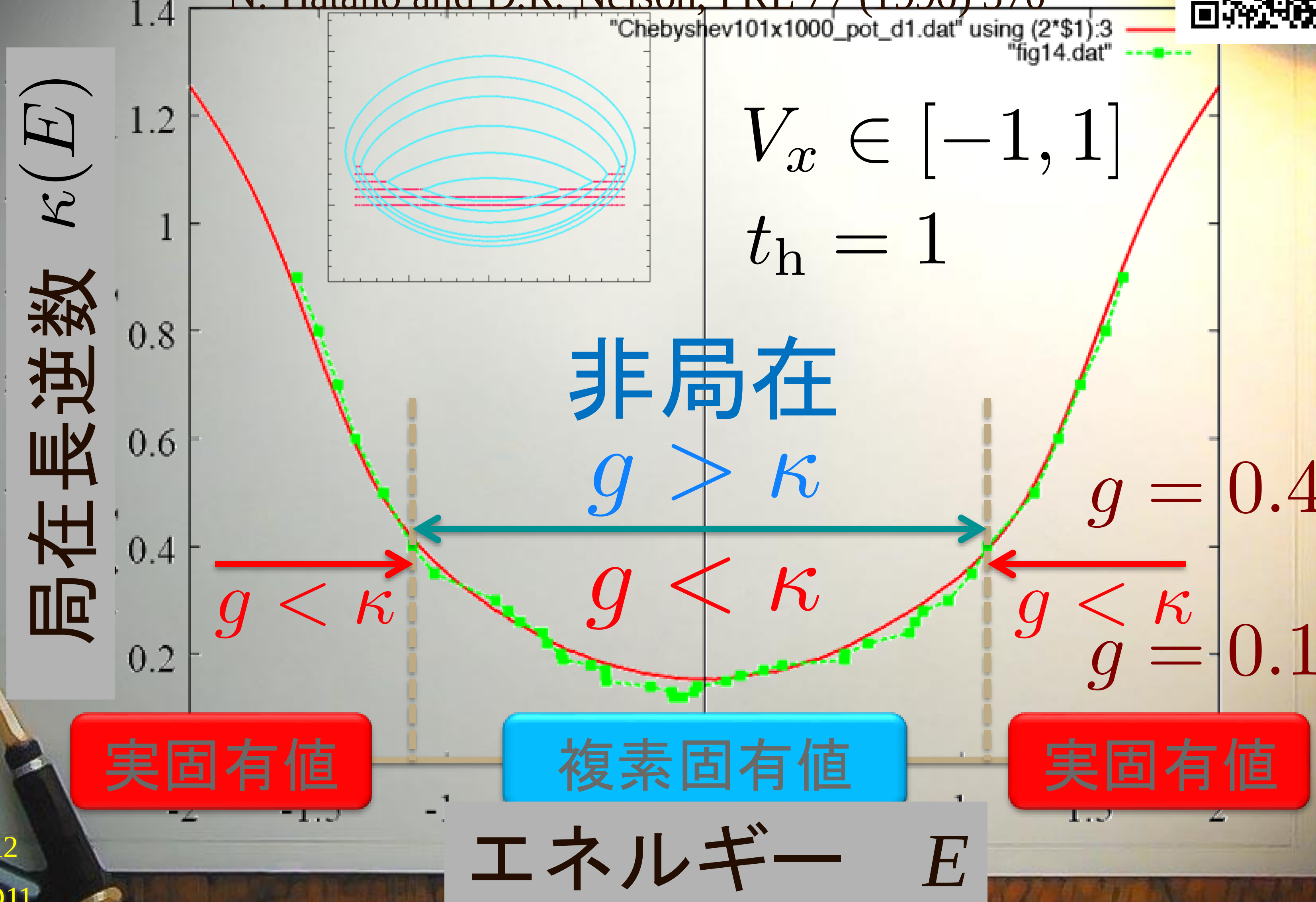
非エルミート非局在化

N. Hatano and D.R. Nelson, PRL 77 (1996) 570



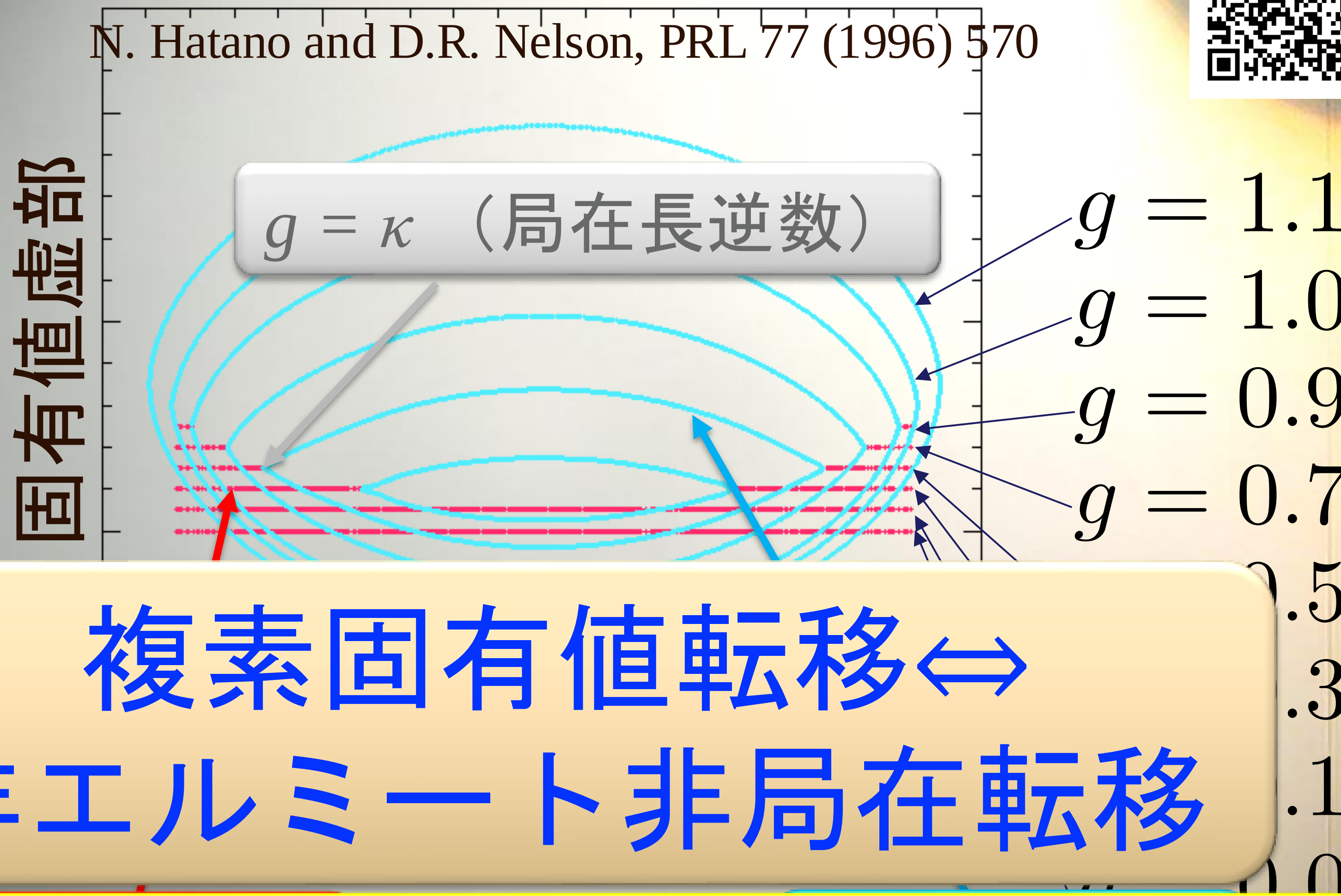
非エルミート非局在化

N. Hatano and D.R. Nelson, PRL 77 (1996) 570



非エルミート非局在化

N. Hatano and D.R. Nelson, PRL 77 (1996) 570



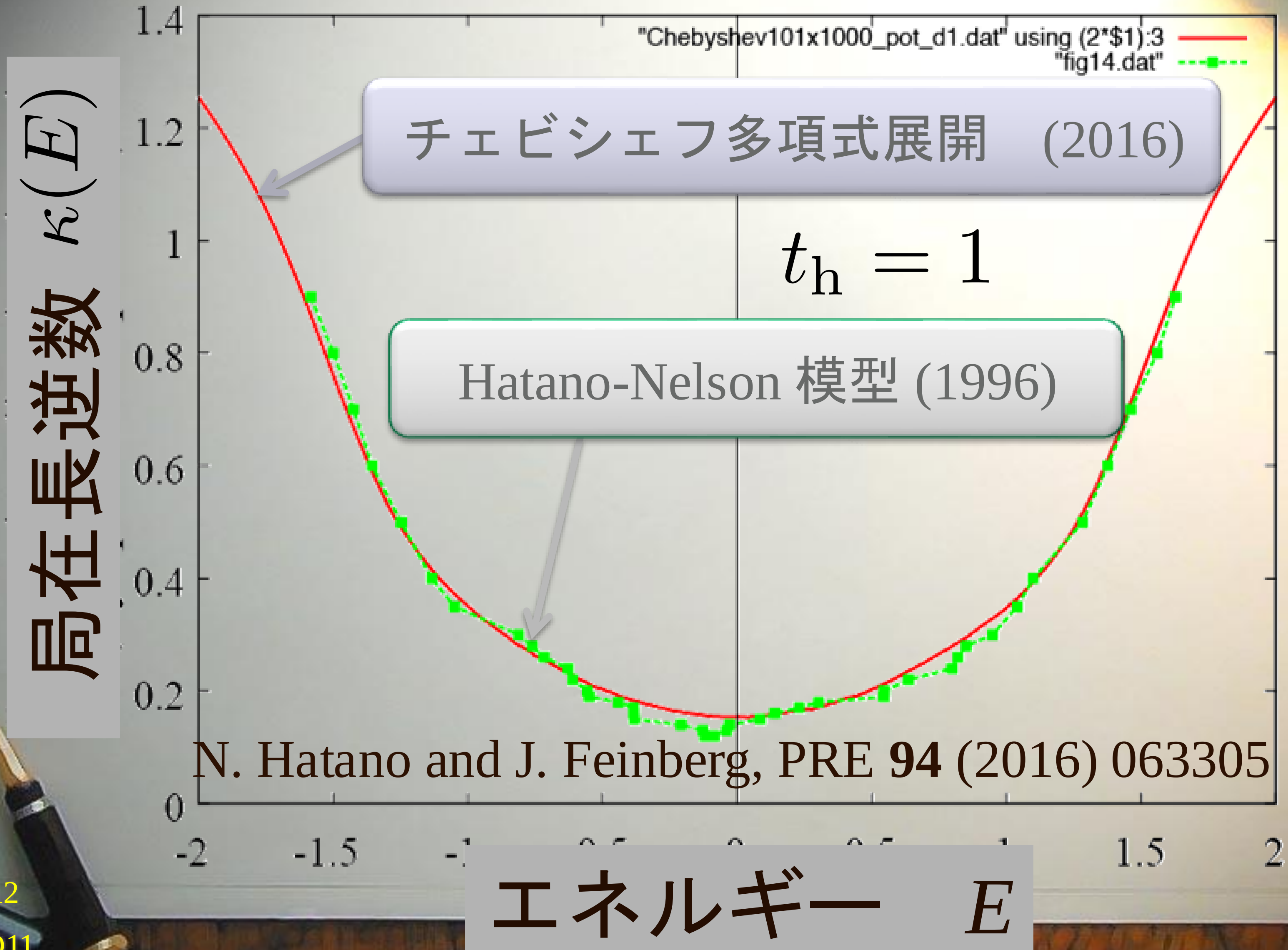
$g = \kappa$ （局在長逆数）

$V_x \in$

複素固有値転移⇔
非エルミート非局在転移

固有値から固有状態がわかる

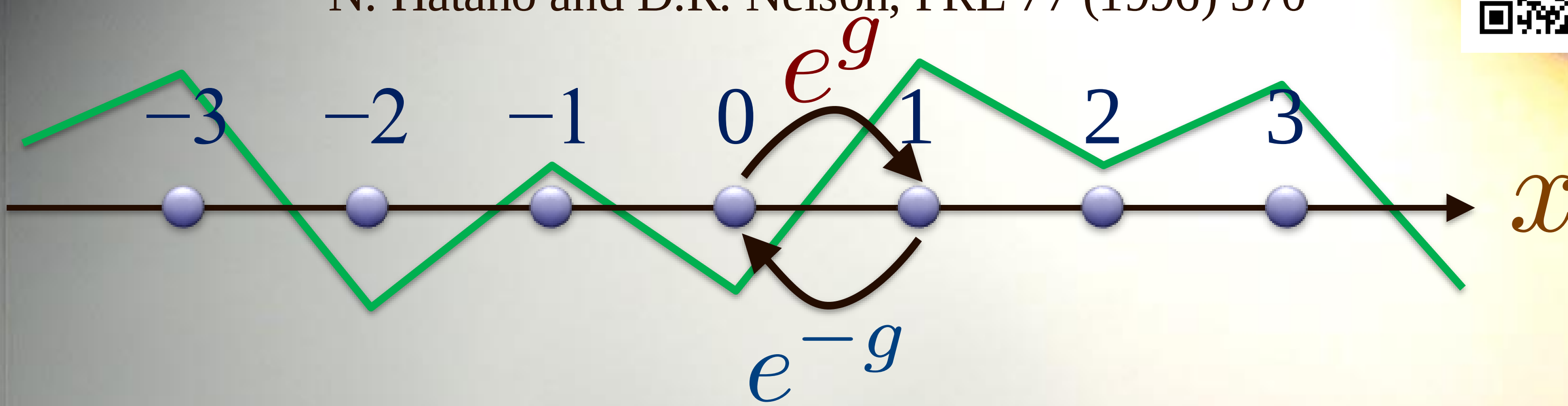
局在長の固有値依存性



局在長逆数 $\kappa(E)$
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
-2
-1.5
1.5
2
"Chebyshev101x1000_pot_d1.dat" using (2*$1):3
"fig14.dat"
チェビシェフ多項式展開 (2016)
$t_{\mathrm{h}} = 1$
Hatano-Nelson 模型 (1996)
N. Hatano and J. Feinberg, PRE **94** (2016) 063305
エネルギー E

Hatano-Nelson 模型

N. Hatano and D.R. Nelson, PRL 77 (1996) 570



ランダムネス κ

→ 局在効果

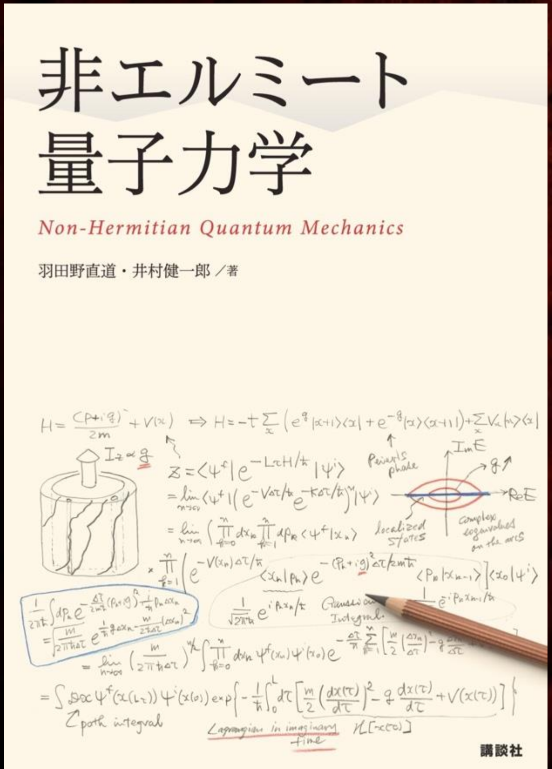
非対称ホッピング g

→ 非局在効果

非エルミート量子力学
現在・過去・未来

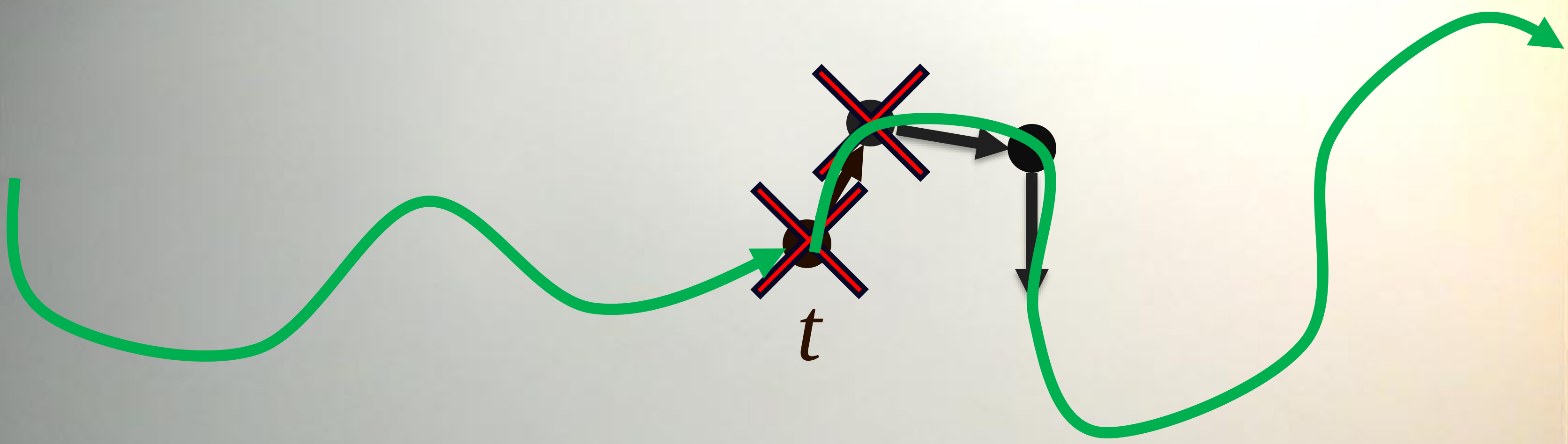
羽田野直道（東大生研）

現在：開放量子系の
非エルミート性
過去：非エルミート
Hatano-Nelson模型
未来：開放量子系の
非マルコフ性



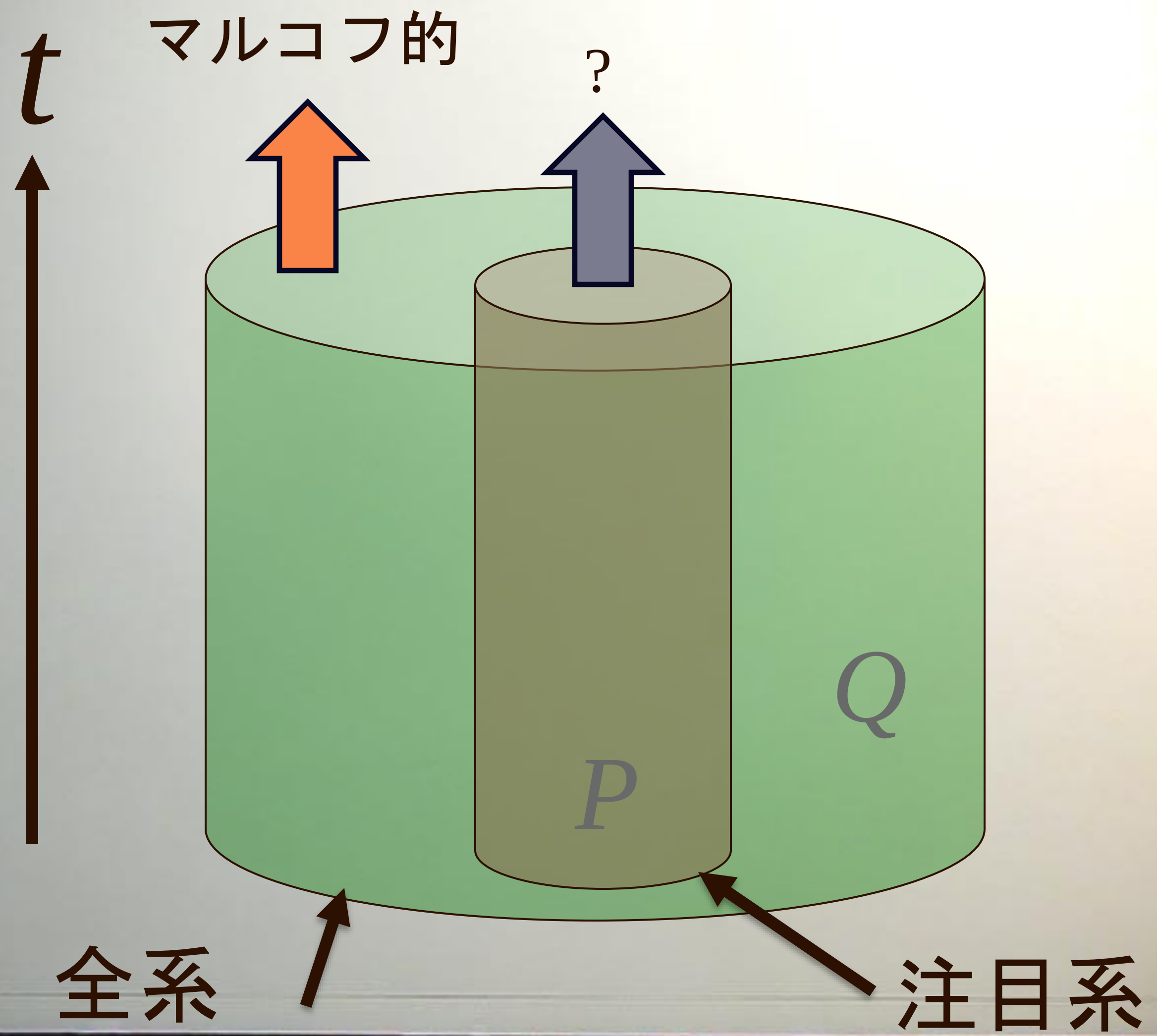
シュレディンガー方程式のマルコフ性

$$\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\Psi(t)\right\rangle = H\left|\Psi(t)\right\rangle$$

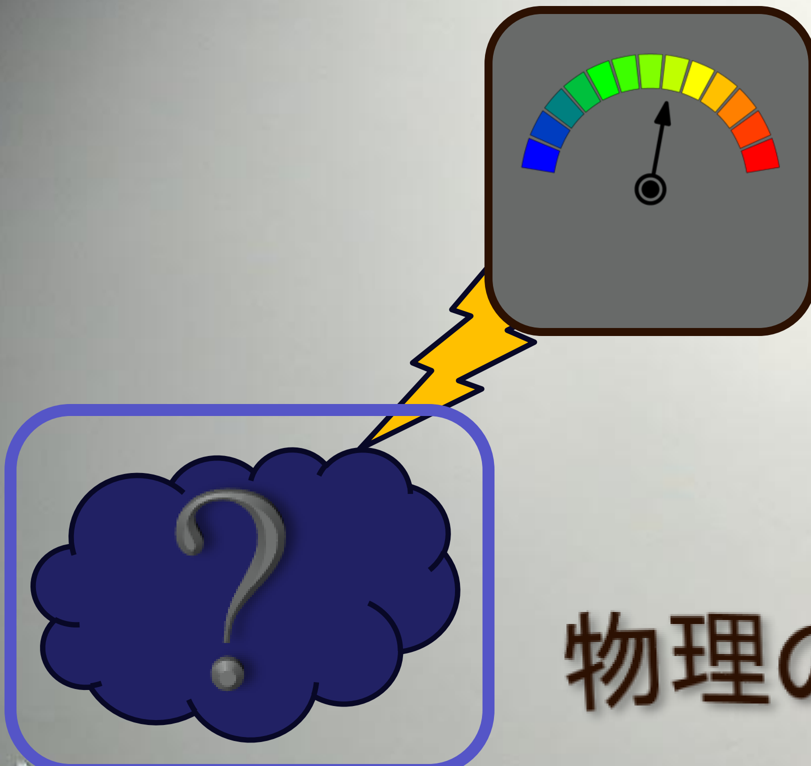


$$\left|\Psi(t)\right\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht}\left|\Psi(0)\right\rangle$$

開放量子系の非マルコフ性



非マルコフダイナミクスの重要性



外界と強く相互作用している開放量子系を扱える理論

物理の新しいパラダイム

時間依存 Feshbach 形式

$$i\hbar\partial_t |\Psi(t)\rangle = H|\Psi(t)\rangle \Longrightarrow i\hbar\partial_t P|\Psi(t)\rangle = ?$$

$$i\hbar\partial_t P|\Psi(t)\rangle = (PHP)P|\Psi(t)\rangle + (PHQ)Q|\Psi(t)\rangle$$

$$i\hbar\partial_t Q|\Psi(t)\rangle = (QHQ)Q|\Psi(t)\rangle + (QHP)P|\Psi(t)\rangle$$

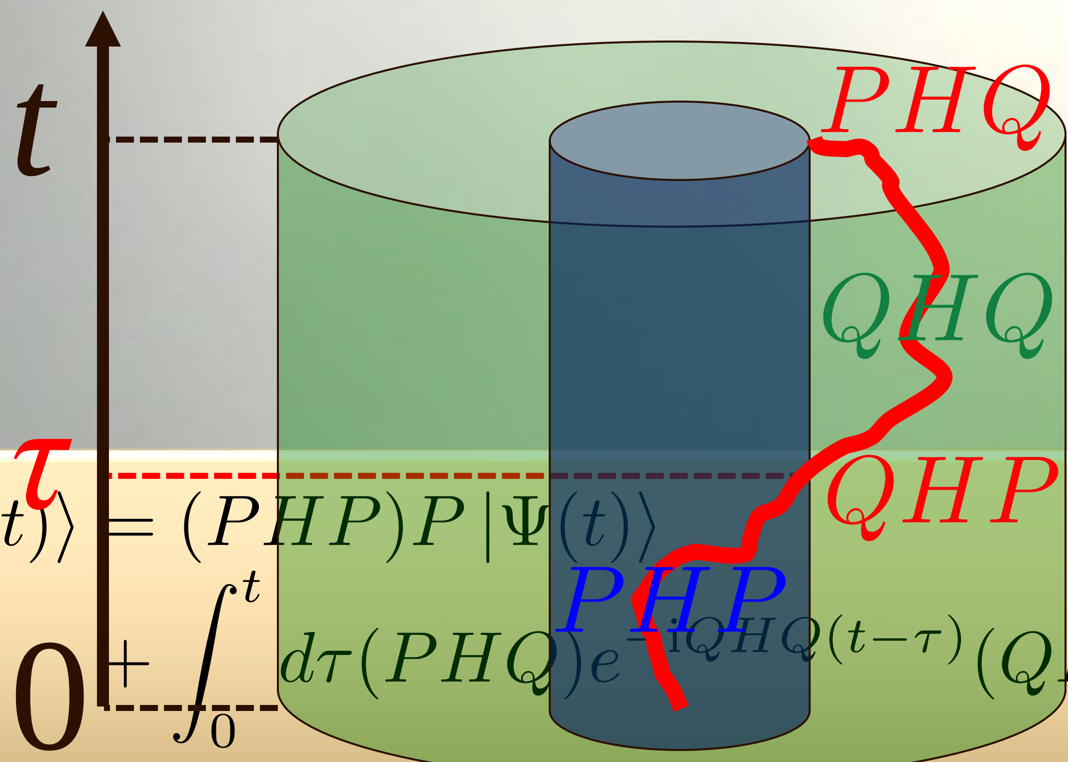
$$Q|\Psi(t)\rangle = \cancel{e^{-iQHQt}Q|\Psi(0)\rangle} + \int_0^t d\tau e^{-iQHQ(t-\tau)}(QHP)P|\Psi(\tau)\rangle$$

初期状態

$$i\hbar\partial_t P|\Psi(t)\rangle = (PHP)P|\Psi(t)\rangle + \int_0^t d\tau (PHQ)e^{-iQHQ(t-\tau)}(QHP)P|\Psi(\tau)\rangle$$

時間依存 Feshbach 形式

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t P\,|\Psi(t)\rangle = (PHP)P\,|\Psi(t)\rangle + \int_0^t d\tau (PHQ)e^{-\mathrm{i}QHQ(t-\tau)}(QHP)P\,|\Psi(\tau)\rangle$$



非マルコフ性

$$
\begin{aligned}
\mathrm{i}\hbar\partial_t P|\Psi(t)\rangle &= \boxed{(PHP)}P|\Psi(t)\rangle \\
&\quad + \int_0^t d\tau \boxed{(PHQ)}\boxed{e^{-\mathrm{i}QHQ(t-\tau)}}\boxed{(QHP)}P|\Psi(\tau)\rangle
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{(PHP)}P|\psi\rangle + \boxed{(PHQ)}\boxed{\frac{1}{E-QHQ}}\boxed{(QHP)}P|\psi\rangle = EP|\psi\rangle
$$

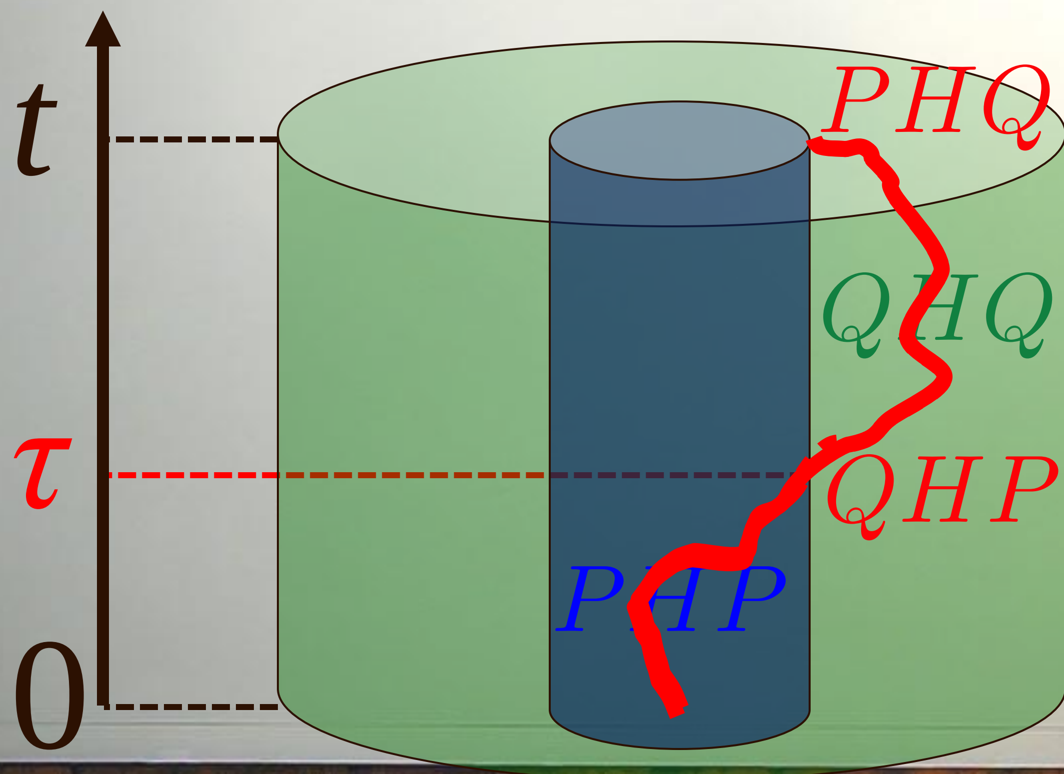
定数で近似

非マルコフ性 ⟷ 非線形固有値問題

マルコフ近似 ⟷ 固有値問題線形化

ボルン・マルコフ近似

1. 環境系との結合が弱い
2. 環境系での相関が途切れる

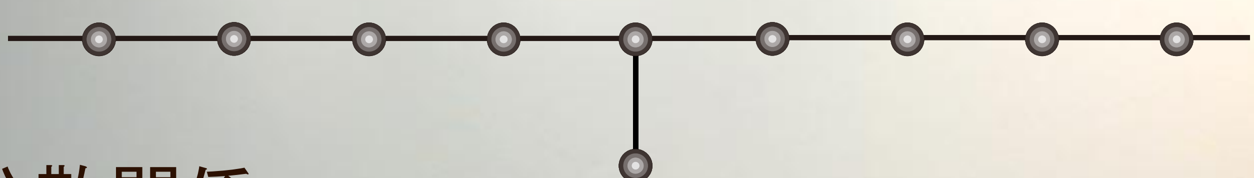


新しい完全系

N. Hatano and G. Ordonez, J. Math. Phys. 55, 122106 (2014)

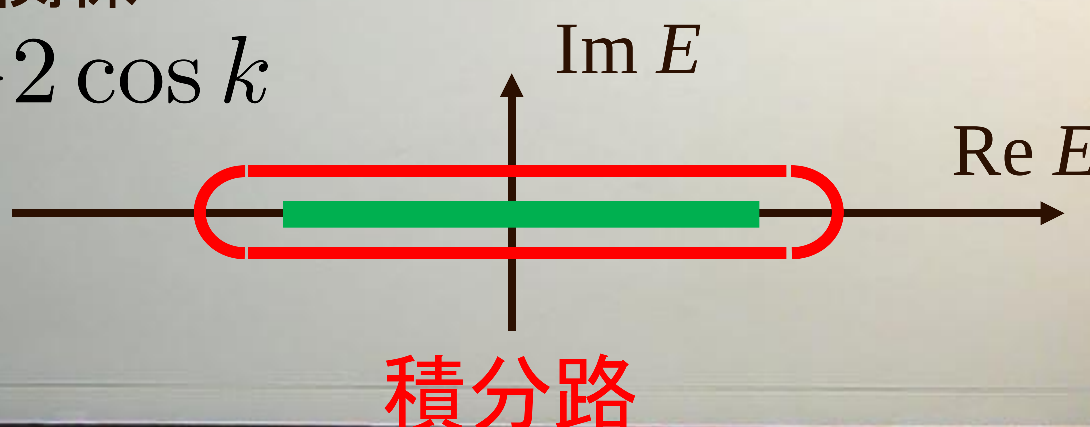
$$Pe^{-\mathrm{i}Ht}P = \oint P\frac{e^{-\mathrm{i}Et}}{E - H_{\mathrm{eff}}(E)}PdE$$

タイトバインディング模型



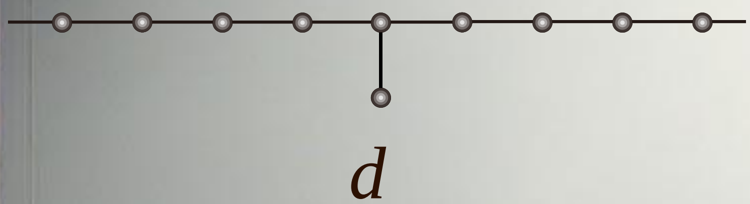
分散関係

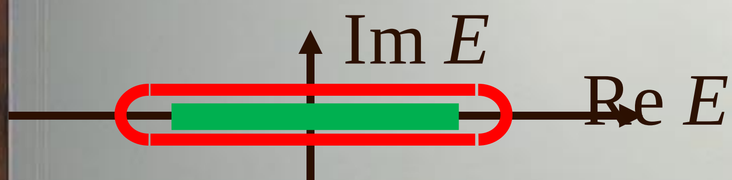
$$E = -2\cos k$$



分散関係に上下限

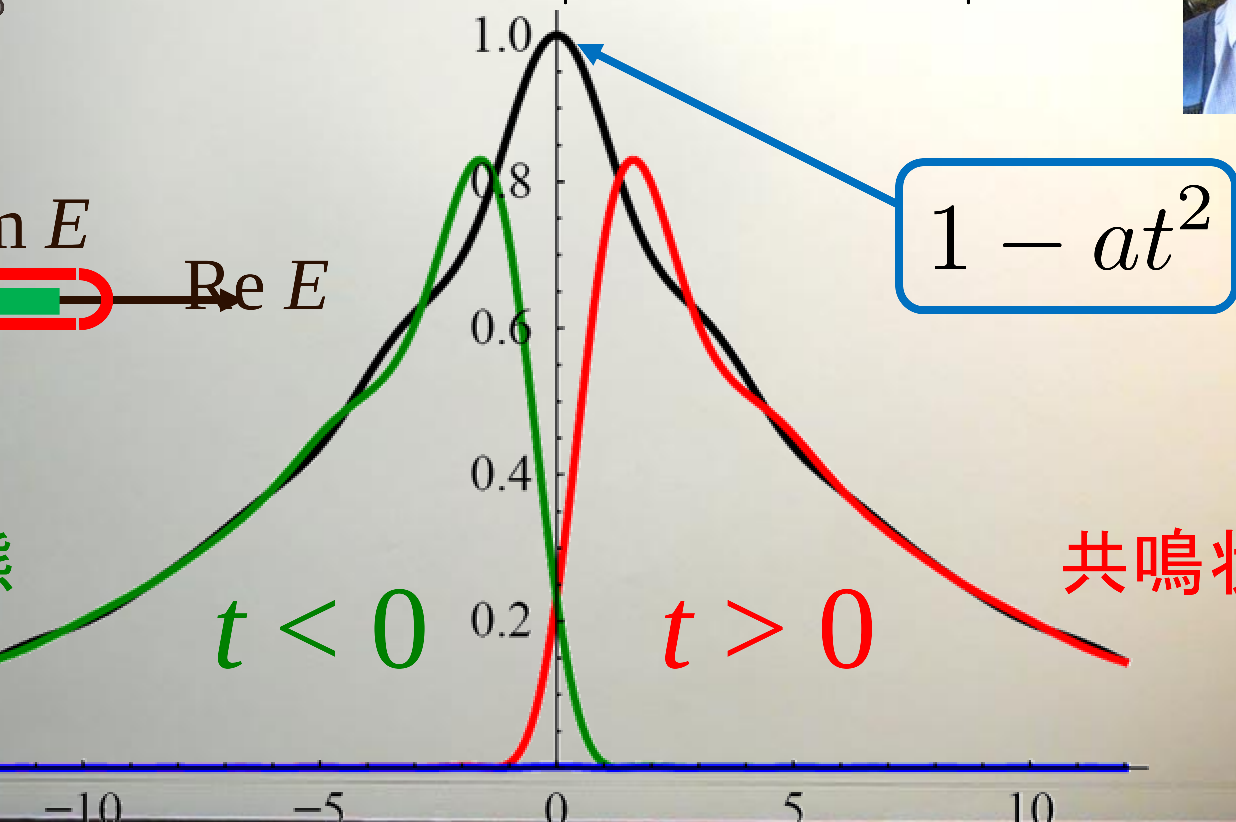
N. Hatano and G. Ordonez, J. Math. Phys. 55, 122106 (2014)





残存確率

$$\left|\langle d|e^{-iHt}|d\rangle\right|^2$$



反共鳴状態

共鳴状態

まとめ

- 開放量子系の非マルコフ・ダイナミクス

  ダイナミクスが
  分散関係と次元に依存

いざ新しい物理へ！