NO. 1.

DATE 12・16・X

運動と振動

第1回

・力学の3法則

ニュートン力学 ⇔ 量子力学，相対性理論

(実験的観察的)　　(小さい)　　(早い)

⇓

力学の第3法則

巨視的なスケールかつ光速よりも十分遅い速さを扱う際の無矛盾かつ完結的な近似理論

・力学の第一法則 (慣性の法則)

$p = const.$ (保存)

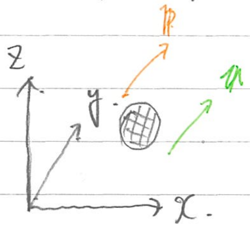
・物体に外力が発生しなければ、その運動量は変化しない。

運動の強さ

$$p = m v = m\frac{dx}{dt}$$

(mass velocity)

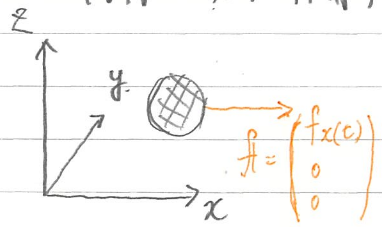
$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}$$



☆第一法則が成り立つ座標系を「慣性座標系」という。

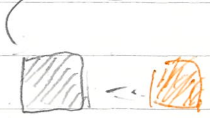
・力学の第二法則

・物体に力が作用する時、その物体の運動量は力積に応じて変化する。



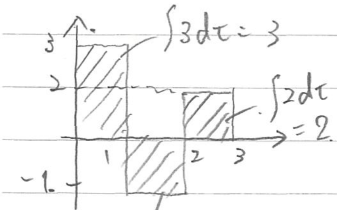
xの運動量 $p_x(t)$ は $\Delta p_x(t) = p_x(t_1) - p_x(t_2)$

$$= \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$$



(力積)

・力積の演習



$\int 3dt = 3$

$\int 2dt = 2$

$\int (-1)dt = -1$

$t = 0 \sim 3$ における力積を求めよ。

$$P = 3 + (-1) + 2 = 4N$$

続き.

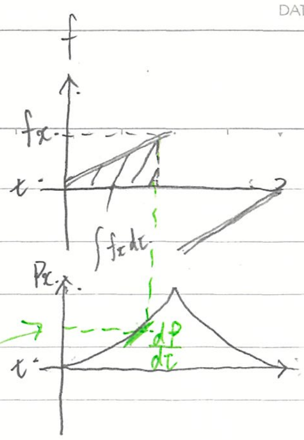
$$\Delta P_x = P_x(t_2) - P_x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f_x(t)\,dt$$

$$\left[P_x \right]_{t_1}^{t_2} = \cdots$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dP_x}{dt}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} f_x(t)\,dt$$

$$\frac{dP_x}{dt} = f_x(t)$$

$P_x = m\dfrac{dx}{dt}$ より $\Leftrightarrow$ $m\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = f_x(t)$ … 運動方程式



No. 1

Date 12・19・金

運動と振動

第2回

ニュートン力学
- 第一法則
- 第二法則 ⇒ 運動方程式

時間微分 $m\frac{dx^2}{dt^2} = f$

$m\ddot{x} = f$

・様々な力

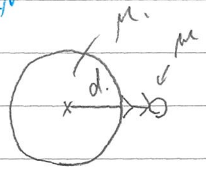
・重力

万有引力

$f = G\frac{Mm}{d^2}$

$\downarrow$

mg

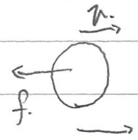


$g = 9.78 \sim 9.83\,\mathrm{m/s^2}$

$\fallingdotseq 9.80665\,\mathrm{m/s^2}$

$\fallingdotseq 9.81\,\mathrm{m/s^2}$

・減衰力

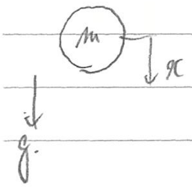


空気抵抗 $f = cv$

粘性減衰定数

速度が大きいと… $f = c'v^2$

例：球の落下問題



① 運動方程式の立式

② $m\ddot{x} = mg$

$\ddot{x} = g$

$v(t) = \dot{x} = gt + C_1$

$x(t) = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$

一般解（C_1, C_2：積分定数）

$v(0) = g\cdot 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$

③ 初期条件の適用

静かに手を放した場合：$t = 0$ (s)

$x(0) = 0,\ v(0) = 0$ より

$x(0) = \frac{1}{2}g0^2 + C_1 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$

$x(t) = \frac{1}{2}gt^2$

（特解）

※よく似た概念で特異解があるので注意

・演習問題

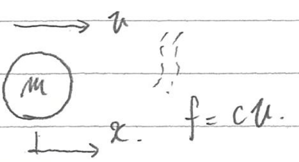
$m = 1\,\mathrm{kg}$ の球を $1\,\mathrm{m}$ の高さから静かに落下させた。地面に当たるまでの時間を求めよ。

$x = \frac{1}{2}gt^2$

$t^2 = \frac{2x}{g}$

$t = \sqrt{\frac{2x}{g}} = 0.45\ [\mathrm{s}]$ //

例：一般解を導け



$f = cv$

① $m\ddot{x} = -cv$

② $m\dot{v} = -cv$

$m\frac{dv}{dt} = -cv$

$\frac{1}{v}\frac{dv}{dt} = -\frac{c}{m}$

tで積分すると

$\int\frac{1}{v}\frac{dv}{dt}dt = -\int\frac{c}{m}dt$

$\log_e x = x$

$\log_e|v| = -\frac{c}{m}t + C_1$

$|v| = e^{-\frac{c}{m}t + C_1}$

$v = C_1' e^{-\frac{c}{m}t}$ （C_1' は任意定数）

$x = -\frac{m}{c}C_1' e^{-\frac{c}{m}t} + C_2$ //

運動と振動

第3回

★力学の問題の解き方

① 運動方程式を立てる
② 一般解を求める
③ 初期条件の適用,特解を求める
④ 定数などを代入し,解(物理量)を求める

例.球の落下

m　x　g

$f = cv$

$\frac{d}{dx}\ln|\boxed{3}x+1| = \frac{1}{3x+1}\cdot\boxed{3}+C$

$\int\frac{1}{g-\frac{c}{m}v}dv$

① $m\ddot{x} = mg - cv$

② $\frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}v$

$\frac{1}{g-\frac{c}{m}v}dv = dt$

$\div m$　$= g-\frac{c}{m}v$

$\boxed{-\frac{m}{c}}\ln|g\boxed{-\frac{c}{m}}v| = t + C_1$

$\ln|g-\frac{c}{m}v| = -\frac{c}{m}t + C_1'$　$(C_1' = -\frac{c}{m}C_1)$

$g - \frac{c}{m}v = \pm e^{-\frac{c}{m}t + C_1'}$

$\frac{c}{m}v - g = C_1'' e^{-\frac{c}{m}t}$　$(C_1'' = \mp e^{C_1'})$

$v = \frac{m}{c}g + C_1''' e^{-\frac{c}{m}t}$　$(C_1''' = \frac{m}{c}C_1'')$

③ 初期条件を適用する.$(t=0, v=0)$・特解を求める.

$v(0) = \frac{m}{c}g + C_1''' \cdot e^0 = 0$

$C_1''' = -\frac{m}{c}g$

$v = \frac{m}{c}g - \frac{m}{c}ge^{-\frac{c}{m}t}$

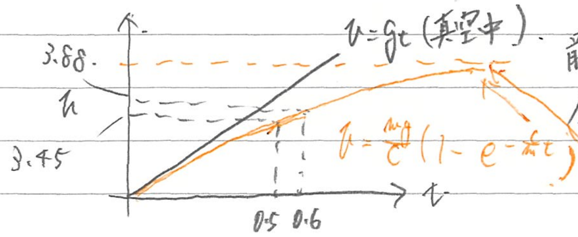
$v = \frac{m}{c}g(1 - e^{-\frac{c}{m}t})$

④ $m = 2g$,　$c = 3mN/(m/s)$,　$g = 9.8\,m/s^2$ とする時.0.6秒後の速度と位置を求めよ。
(0.5秒後)

$v(0.6) = \frac{mg}{c} - \frac{mg}{c}e^{-\frac{c}{m}0.6} = 3.88\,m/s$ //

$x(0.6) = \frac{mg}{c}\cdot 0.6 + \frac{m^2g}{c^2}(e^{-\frac{c}{m}0.6} - 1) = 1.33\,m$ //

$v(0.5) = 3.45\,m/s$ //,　$v(0.5) = 0.97\,m$ //



前回の授業: $\ddot{x} = g$,　$\dot{x} = gt + C$.

今回の授業: $m\ddot{x} = mg - cv$.

ある一定の速度まで到達:終端速度

$\lim_{t\to\infty} v = \frac{mg}{c}(1 - e^{-\frac{c}{m}t}) = \underline{\frac{mg}{c}}$

終端速度を求めよ.

例 1. 2g.

$v_\infty = 6.53\,m/s$ //

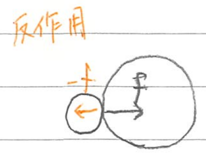
2. 1kg = 1000g.

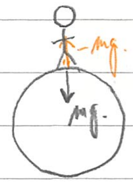
$v_\infty = 3266\,m/s$ //

運動と振動

第十回

力学の第三法則（作用・反作用の法則）

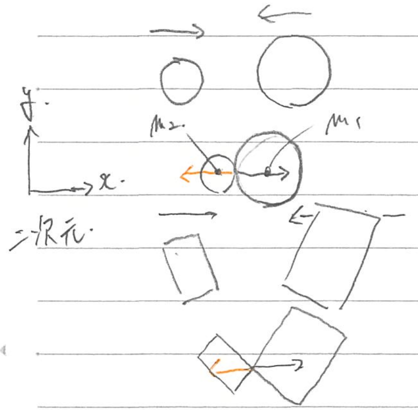




⇒ 力は何もないところから生じない。

必ず反作用が生じる → 大きさが等しい逆向きの力

・衝突



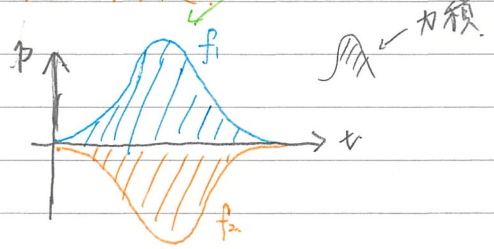
・力の作用線が重心を通る。

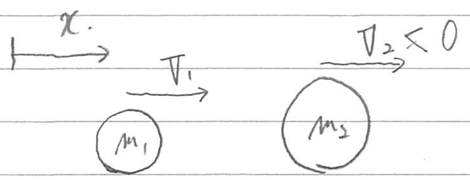
→ 向心衝突

力の作用線が重心を通らない

→ 偏心衝突

上下対称（第3法則）





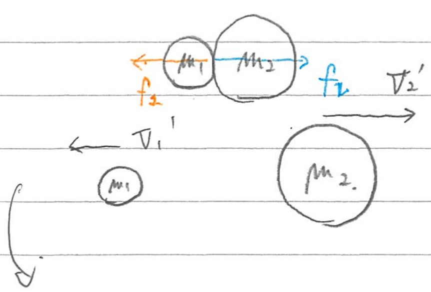
2物体の運動量の和

$P_{1+2} = P_1 + P_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$

✓ m_1 は $\int f_1\,dt$ の分だけ運動量変化

✓ m_2 は $\int f_2\,dt$ の分だけ運動量変化

第3法則



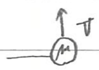
$P'_{1+2} = m_1 v_1' + m_2 v_2'$

$+\int f_1\,dt \quad +\int f_2\,dt = -\int f_1\,dt$

衝突前後で2つの物体の運動量は変化しない ⇒ 運動量保存の法則

$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \quad (\sum m_i v_i = const)$

◎回転運動：$L = r \cdot mv = mr^2\omega = const.$



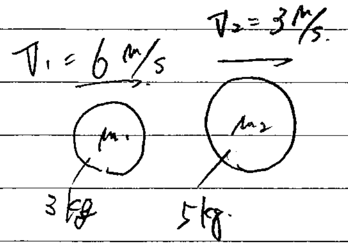
続き

☆反発係数：衝突前後の相対速度の比

$$e = -\frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2} \qquad 0 \leqq e \leqq 1$$

$e=1$で完全弾性衝突 → 運動エネルギーが保存

・衝突



反発係数0.55の時衝突後の速度v_1', v_2'は？

$$3\cdot 6 + 5\cdot 3 = 3v_1' + 5v_2'$$

$$0.55 = \frac{-(v_1' - v_2')}{6-3}$$

$$1.65 = -v_1' + v_2'$$

$$33 = 3v_1' + 5v_2'$$

$$1.65 = -v_1' + v_2'$$

$$+)\ 4.95 = -3v_1' + 3v_2'$$

$$37.95 = 8v_2'$$

$v_1' = 3.09\,m/s$　$v_2' = 4.74\,m/s$

No. 1
Date 1.9.金

運動と振動

第5回

- ニュートン力学
- 量子力学・相対性理論
  (ミクロ・光速に近い)

力学の三法則
- 第一法則 ⇒ $p = const.$
- 第二法則 ⇒ $\Delta p = \int f(t)\,dt$
- 第三法則 ⇒ $m\ddot{x} = F$
  ⇓
  作用・反作用

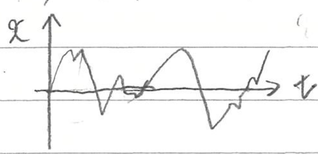
→ 衝突問題の…
- 運動量保存 $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$
- 反発係数 $e = -\dfrac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$

運動方程式の解法

① 運動方程式を立てる
② 一般解を求める
③ 初期条件を適用，特解を求める
④ 定数などを代入し，解(物理量)を求める

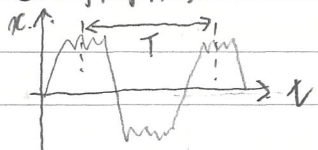
○ 振動の種類

① 不規則振動



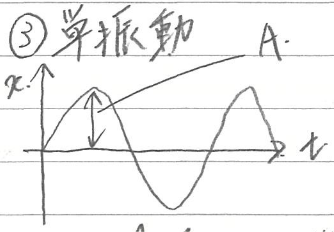
$x = g(t)$

② 周期振動



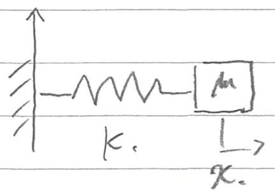
$x = g(t) = g(t + nT)$

③ 単振動

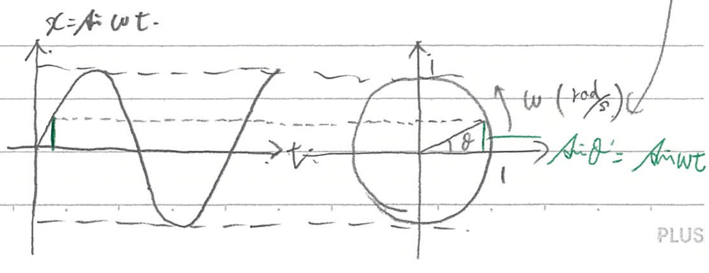


$x = A \sin(\omega t + \phi)$
振幅 A，角振動数 ω，位相 φ
$\omega = 2\pi f$

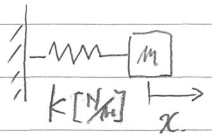
☆ 振動の例
→ バネ・コイル・コンデンサ回路，分子における振動・地震

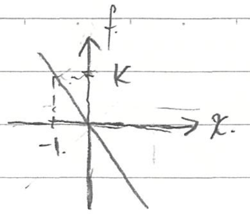


☆ 一定の角振動数を持つ最もシンプルな振動
→ なぜ三角関数？：一定の角速度を持つ円運動を考える。



続き





フックの法則 $f = -kx$.

① $m\ddot{x} = -kx$.

② [A] 直感で解く.（解を仮定して代入）

[B] 数学的に解く.（変数分離；積分）

$x = A\sin(\omega t + \phi)$ を代入, ω を求める.

$\dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \phi)$

$\ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi)$

①に代入 $-mA\omega^2\sin(\omega t + \phi) = -kA\sin(\omega t + \phi)$

$-m\omega^2 = -k$

$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ 固有角振動数：ω_n

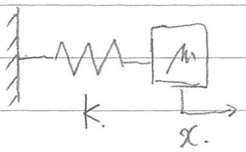
任意定数

$x = A\sin(\omega_n t + \phi)$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ //

No. 1
Date 1.13.X'

運動と振動

第6回



① $m\ddot{x} = -kx$.

② [A] 直感で解く（解を仮定）

[B] 数学的に解く（積分）

$x = A\sin(\omega t + \phi)$ と仮定

$$-mA\omega^2\sin(\omega t+\phi) = -kA\sin(\omega t+\phi)$$

$$-m\omega^2 = -k$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

[B] 数学的な解法

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_n^2 x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}\omega_n^2x^2\right)$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = -\omega_n^2x^2 + C \quad (\omega_n^2B^2 = C)$$

$$〃 = \omega_n^2(B^2 - x^2)$$

$$\frac{dx}{dt} = \pm\omega_n\sqrt{B^2-x^2}$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{B^2-x^2}}dx = \pm\int\omega_n dt$$

$$\sin^{-1}\left(\frac{x}{B}\right) + C' = \pm\omega_n t + C''$$

$$\frac{x}{B} = \sin(\pm\omega_n t + C'' - C')$$

$$x = \pm B\sin(\omega_n t + \phi)$$

$$x = A\sin(\omega_n t + \phi), \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad //$$

* $\int\frac{1}{\sqrt{B^2-x^2}}dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{B}\right) + C.$

$\sin(-x) = -\sin x.$

$\boxed{x = B\sin\theta}$ $\int\frac{1}{\sqrt{B^2-x^2}}dx$ に代入すると.

$$\frac{dx}{d\theta} = B\cos\theta$$

$$dx = B\cos\theta\, d\theta$$

$$\int\frac{B\cos\theta}{\sqrt{B^2-B^2\sin^2\theta}} = \int\frac{\cos\theta}{\sqrt{\cos^2\theta}}d\theta = \theta + C$$

$$\int 1\, d\theta$$

$$= \sin^{-1}\left(\frac{x}{B}\right) + C.$$

✓ $t=0$ で $v=0$ [m/s], $x=1$ [m] とすると.
特解はどうなるで？求めよ.
また固有角振動数 ω_n と振動の解を求めよ.
但し $m=1$ [kg], $k=1$ [N/m] とする.

③ $x = A\sin(\omega_n t + \phi)$

$$v = A\omega_n\cos(\omega_n t + \phi)$$

$$0 = \cancel{A\omega_n}\cos(0 + \phi)$$

$\div A\omega_n$

$$0 = \cos\phi, \quad \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$x = A\sin\left(\omega_n t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$1 = A\sin\left(0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$A = 1 \quad //$$

よって

$$x = \sin\left(\omega_n t + \frac{\pi}{2}\right)$$

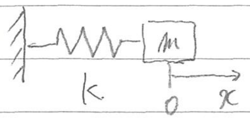
$(\cos\omega_n t)$

④ $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 1$ [rad/s]

$$x = \sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$$

運動と振動

第7回

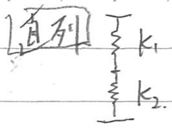


一般解

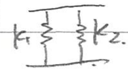
$x = A\sin(\omega_n t + \phi)$, $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$v = A\omega_n \cos(\omega_n t + \phi)$

直列

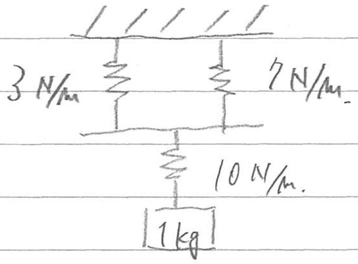


並列



$k = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$　　$k = k_1 + k_2$

問1.



固有角振動数 ω_n, 固有振動数 f_n を求めよ.

$k = \frac{10 \cdot k}{10 + k} = \frac{100}{20} = 5$ N/m

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{5} = 2.24$ rad/s, $f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{2.24}{2\pi} = 0.357$ Hz

$t = 0$ で $x_0 = 5$ mm, $v_0 = 1$ m/s とする。$m = 10$ kg, $k = 200$ N/mm のとき.

①固有角振動数 ω_n ②振幅 A ③初期位相 ϕ ④最大加速度を求めよ。

① $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{200 \times 10^3}{10}} = 141$ rad/s

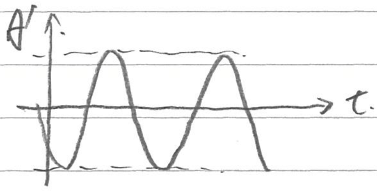
③ $\left.\begin{array}{l} 5 \times 10^{-3} = A\sin\phi \\ 1 = A\omega_n \cos\phi \end{array}\right\} \rightarrow A = \frac{1}{\omega_n \cos\phi} \Rightarrow 5.0 \times 10^{-3} = \frac{\sin\phi}{\omega_n \cos\phi} \Rightarrow \tan\phi = 5.0 \times 10^{-3} \times \omega_n \Rightarrow \phi = 0.615$

② $A = \frac{1}{\omega_n \cos(0.615)} = 8.68 \times 10^{-3}$

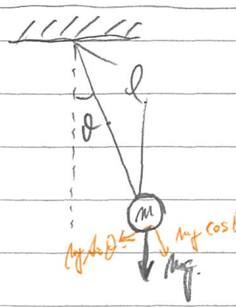
④ $x = 8.68 \times 10^{-3} \sin(\omega_n t + 0.615)$

$\dot{x} = 8.68 \times 10^{-3} \omega_n \cos(\omega_n t + 0.615)$

$\ddot{x} = -8.68 \times 10^{-3} \omega_n^2 \sin(\omega_n t + 0.615)$



$A' = 8.68 \cdot 10^{-3} \times \omega_n^2 = 173$ m/s²

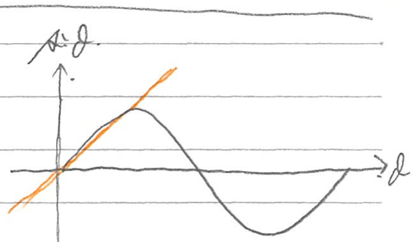


運動方程式. 並進: $m\ddot{x} = F$

回転: $I\ddot{\theta} = T$

慣性モーメント(回転のしにくさ)

トルク(回転方向に働くモーメント)



① $I\ddot{\theta} = T$

$ml^2\ddot{\theta} = F \cdot l$

$ml^2\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \cdot l$

② θ が小さいと仮定 ⇒ 線形化

$\sin\theta \simeq \theta$ → $\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \cdots$ → マクローリン展開

$ml^2\ddot{\theta} = -mg\theta l$

$\ddot{\theta} = \frac{g}{l}\theta$ → バネマスと同じ形

$\theta = A\sin(\omega_n t + \phi)$, $\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}}$

練習

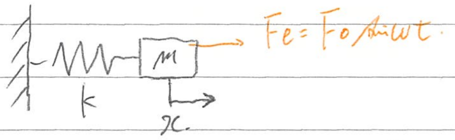
$l = 3\,m$, $m = 5\,kg$, $g = 9.81\,m/s^2$ とすると、固有角振動数 ω_n は?

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9.81}{3}} \fallingdotseq 1.81\ rad/s$$

運動と振動

第8回

- 自由振動
- 強制振動



① 運動方程式は

$$m\ddot{x} = F$$

$$m\ddot{x} = -kx + F_0 \sin \omega t$$

仮定: $x = A \sin \omega t$

$\ddot{x} = -A\omega^2 \sin \omega t$

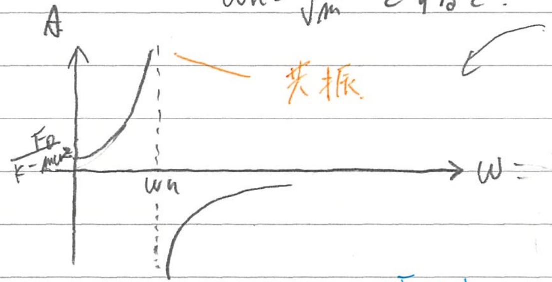
② $m(-A\omega^2 \sin \omega t) = -kA \sin \omega t + F_0 \sin \omega t$

$$-mA\omega^2 = -kA + F_0$$

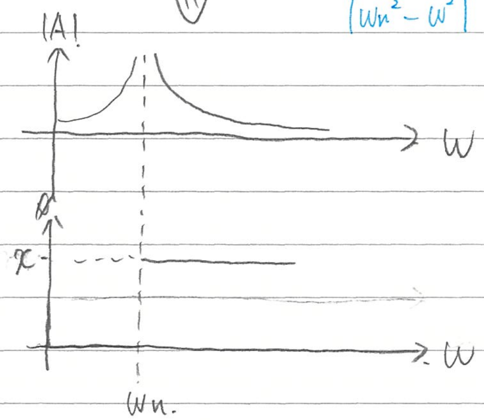
$$A = \frac{F_0}{k - m\omega^2}$$

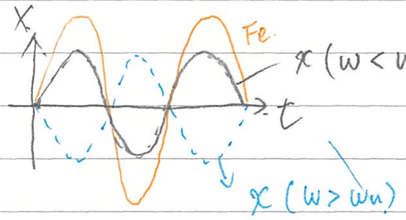
特殊解

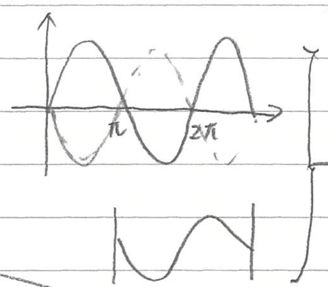
$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とすると ∴ $A = \frac{F_0/m}{\omega_n^2 - \omega^2}$, $x = \frac{F_0/m}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin \omega t$



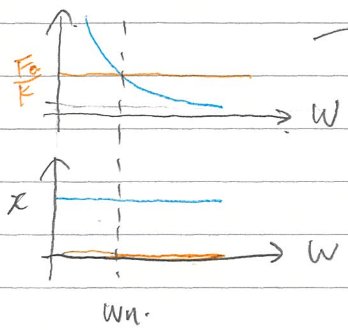
$x = \frac{|F_0/m|}{|\omega_n^2 - \omega^2|} \sin(\omega t + \phi)$, $\phi = \begin{cases} 0 & (\omega < \omega_n) \\ \pi & (\omega > \omega_n) \end{cases}$

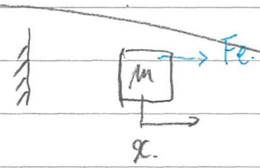






→ $-\sin x = \sin(x + \pi)$

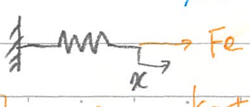




★ 慣性と剛性による抵抗力を考え

$\boxed{慣性}$ $m\ddot{x} = F_0 \sin \omega t$

$x = -\frac{F_0}{m\omega^2} \sin \omega t$



$\boxed{剛性}$ $0 = -kx + F_0 \sin \omega t$

$x = \frac{F_0}{k} \sin \omega t$

→ 両方あると逆位相なので
抵抗力が打ち消し合う
→ 共振

No. 2

Date 1.23.金

続き

① $m = 5kg$, $k = 1000 N/m$ である時、W_n はいくらか。
また、$F_e = 5N$ の時、各振動数における振幅を求めよ。

・$W_n = 14.1\ rad/s$

・$W = 1.4\ rad/s$ のとき

$|A| = 5.05 \times 10^{-3}\ m$

・$W = 14\ rad/s$ のとき

$|A| = 0.25\ m$

・$W = 140\ rad/s$ のとき

$|A| = 5.15 \times 10^{-5}\ m$

PLUS

第9回 運動と振動.

注) 数学3を履習している人は その手法を使って解いても良い.
定数係数線形微分方程式の解法 ⇒ 本質的に同じ.

- 右辺が0の時：一般解 ⇒ x_h (斉次)
- 右辺が $f(x)$ の時：〃 ⇒ $x_h + x_p$ — 特殊解

満たす解

運動方程式

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin\omega t$$

自由振動解 $x_h = A\sin(\omega t + \phi)$

$$x_p = \frac{F/m}{\omega_n^2 - \omega^2}\sin\omega t$$

よって $x = x_h + x_p$　$t=0$ で $x=0$, $\dot{x} = \frac{F\omega/m}{\omega_n^2 - \omega_n}$ とすると、$A=0$ より

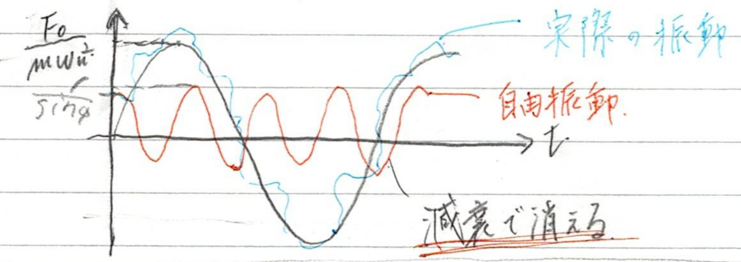
$$x = \frac{F_0/m}{\omega_n^2 - \omega^2}\sin\omega t$$

例えば、$t=0$ で $x = 1\,\mathrm{m}$, $\dot{x} = 0$ のとき.

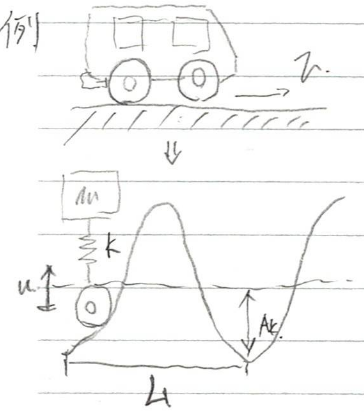
$$\left.\begin{aligned} x(0) &= 1 = A\sin\phi \\ \dot{x}(0) &= 0 = A\omega_n\cos\phi + \frac{F_0/m}{\omega_n^2-\omega^2}\omega \end{aligned}\right\} \Rightarrow \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_n}{C'}\right),\quad A = \frac{1}{\sin\phi}$$

$$C' = \frac{F_0/m}{\omega_n^2 - \omega^2}\omega$$

よって解は. $x = \left(\frac{1}{\sin\phi}\right)\sin\left(\omega t + \tan^{-1}\left(\frac{\omega_n}{C'}\right)\right) + \frac{F_0/m}{\omega_n^2-\omega^2}\sin\omega t$



例



運動方程式.

$$m\ddot{x} = -k(x - u)$$

$$u = A_r\sin(2\pi f_r t)$$

$$f_r = \frac{v}{L}$$

$$\therefore\ m\ddot{x} = -kx + kA_r\sin\left(2\pi\frac{v}{L}t\right)$$

$$m\ddot{x} + kx = kA_r\sin\left(2\pi\frac{v}{L}t\right)$$

$$x = \frac{\omega_n^2 A_r}{\omega_n^2 - \omega^2}\sin\left(\frac{2\pi v}{L}t\right) \quad //$$

$$\omega = \frac{2\pi v}{L},\quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

一致すると、共振する