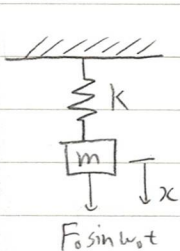


運動と振動

前回

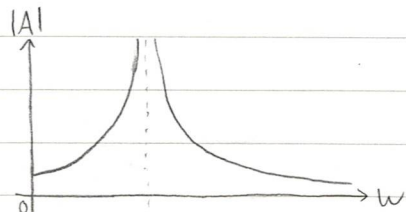
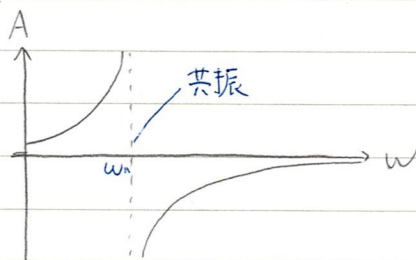


(運)

$$m\ddot{x} = -kx + F_0 \sin \omega t$$

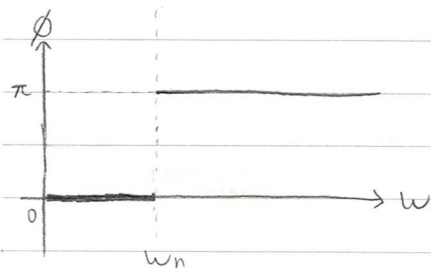
↓ 解く (略)

$$x = A \sin \omega t, \quad A = \frac{F_0/m}{\omega_n^2 - \omega^2}, \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$$



$$x = |A| \sin(\omega t + \phi)$$

$$\phi = \begin{cases} 0 & (\omega < \omega_n) \\ \pi & (\omega > \omega_n) \end{cases}$$

小慣性: $m\ddot{x} = F_0 \sin \omega t$

$$x = -\frac{F_0}{m\omega^2} \sin \omega t$$

剛性: $Kx = F_0 \sin \omega t$

$$x = \frac{F_0}{K} \sin \omega t$$

慣性と剛性による抵抗力を考える。

⇒ 両方あると逆相なので、抵抗が打ち消し合う

抵抗力が完全に打ち消し合う ⇒ 共振

演習 $m = 5 \text{ kg}$, $k = 1000 \text{ N/m}$ のとき $\omega_n = ?$

また、 $F_0 = 5 \text{ N}$ のとき、各角振動数における振幅は？

$\omega = 1.4 \text{ rad/s}$, 14 rad/s , 140 rad/s として、それぞれ求めよ。

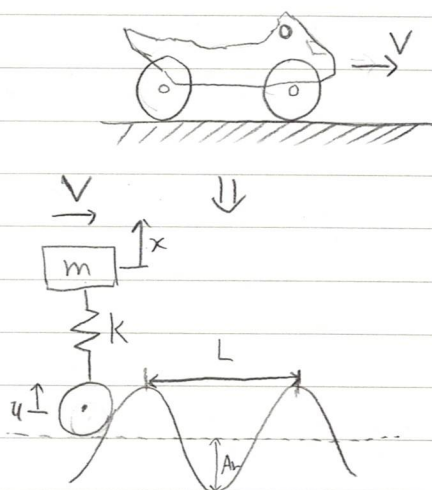
$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1000}{5}} = \sqrt{200} = 14.1 \text{ [rad/s]}$$

$$|A| = \left| \frac{F_0/m}{\omega_n^2 - \omega^2} \right| = \left| \frac{1}{200 - \omega^2} \right|$$

$$\omega = 1.4 \text{ rad/s} \Rightarrow |A| = 5.05 \times 10^{-3} \text{ [m]}$$

$$\omega = 14 \text{ rad/s} \Rightarrow |A| = 0.250 \text{ [m]}$$

$$\omega = 140 \text{ rad/s} \Rightarrow |A| = 5.15 \times 10^{-3} \text{ [m]}$$



路面による加振周波数

$$f_r = \frac{V}{L}, \quad \omega_r = 2\pi \frac{V}{L}$$

$$u = A_r \sin\left(\frac{2\pi V}{L} t\right)$$

$$\textcircled{導} \quad m\ddot{x} = -k(x - u) \quad \text{相対変位}$$

$$m\ddot{x} = -kx + k \cdot A_r \sin\left(\frac{2\pi V}{L} t\right)$$

$$x = \frac{\omega_n^2 A_r}{\omega_n^2 - \omega^2} \sin\left(\frac{2\pi V}{L} t\right)$$

演習 体重 60 kg の人が、 160 kg のバイクに乗って ($k = 5.5 \text{ kN/m}$)

90 km/h で凹凸地面 ($L = 30 \text{ m}$, $A_r = 50 \text{ mm}$) を走行している。

加振周波数 f_r と振幅 $|A|$ を求めよ。

$$f_r = \frac{V}{L} = \frac{90 \cdot \frac{1000}{3600}}{30} = 0.833 \text{ Hz}$$

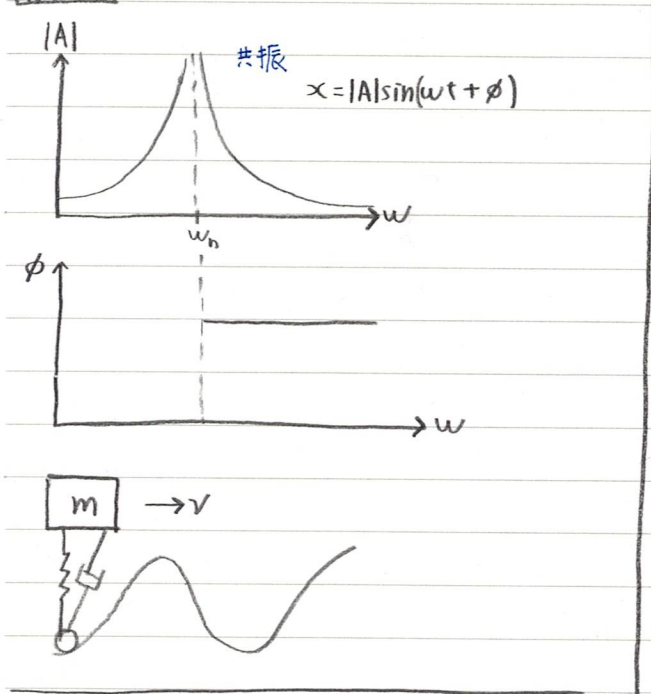
$$\omega_r = 5.24 \text{ rad/s} \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = 5 \text{ rad/s}$$

$$|A| = \left| \frac{\omega_n^2 A_r}{\omega_n^2 - \omega^2} \right| = \left| \frac{5^2 \times 50 \times 10^{-3}}{5^2 - 5.24^2} \right| = 0.52 \text{ m}$$

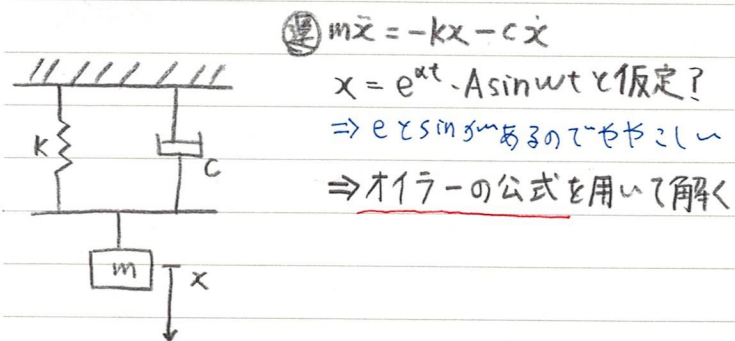
運動と振動講義ノート

1/21

前回



減衰自由振動



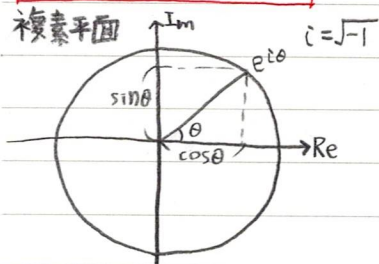
* 減衰力

① $m\ddot{x} = -c\dot{x}$

$\dot{x} = c' e^{-\frac{c}{m}t}$

$x = c'' e^{-\frac{c}{m}t} +$

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$



指数関数と虚数と三角関数の間に成り立つ恒等式

$\Rightarrow$ 最も美しい式 (by ファインマン)

$$\begin{aligned}
 A \sin(\omega t + \phi) &= \underline{ce^{i\omega t} + \bar{c} \cdot e^{-i\omega t}} \\
 &= (a+ib)(\cos\omega t + i\sin\omega t) + (a-ib)(\cos\omega t - i\sin\omega t) \quad \left(\begin{array}{l} c = a+ib \\ \bar{c} = a-ib \end{array} \right. \text{ (複素共役)}) \\
 &= a\cos\omega t + a i \sin\omega t + i b \cos\omega t - b \sin\omega t \\
 &\quad + a\cos\omega t - a i \sin\omega t - i b \cos\omega t - b \sin\omega t \\
 &= 2a\cos\omega t - 2b\sin\omega t \\
 &= A \sin(\omega t + \phi)
 \end{aligned}$$

$$|A| = \sqrt{(2a)^2 + (2b)^2}, \quad \tan(-\frac{b}{a}) = \phi$$

(三角関数の合成)

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0$$

$$\lambda = a+ib$$

代入 $\left\{ \begin{array}{l} x = Ae^{\lambda t} \text{ と仮定, } * \lambda \text{ は複素数を取りうる} \\ \dot{x} = A\lambda e^{\lambda t} \\ \ddot{x} = A\lambda^2 e^{\lambda t} \end{array} \right.$

$$Am\lambda^2 e^{\lambda t} + Ac\lambda e^{\lambda t} + Ake^{\lambda t} = 0$$

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$$

$$\lambda = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mk}}{2m}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \gamma = \frac{c}{2\sqrt{mk}} \text{ (減衰比)}$$

$$\lambda = \omega_n(-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 1})$$

① $\gamma < 1$ の場合 (粘性減衰振動)

$$\gamma^2 - 1 < 0 \Rightarrow \lambda \text{ が複素数に}$$

$$\sqrt{\gamma^2 - 1} = i\sqrt{1 - \gamma^2}$$

$$x = Ae^{\omega_n(-\gamma \pm i\sqrt{1-\gamma^2})t}$$

$$x = e^{-\gamma\omega_n t} \{ A_1 e^{i\sqrt{1-\gamma^2}\omega_n t} + A_2 e^{-i\sqrt{1-\gamma^2}\omega_n t} \}$$

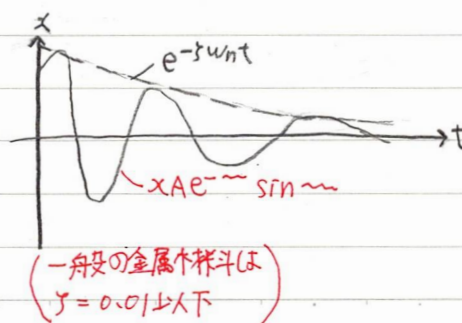
$$\omega_d = \sqrt{1 - \gamma^2} \omega_n \text{ とする. (減衰固有角振動数)}$$

$$x = e^{-\gamma\omega_n t} (A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t})$$

$$A_1 = C, A_2 = \bar{C} \text{ とする.}$$

$$x = Ae^{-\gamma\omega_n t} \sin(\omega_d t + \phi)$$

共役をとると、複素数を含む解になる。
が、初期条件が実数なので最終的に消える



問題

初期条件 $t=0$, $x=20[\text{m}]$, $\dot{x}=0$ とする。

$m=1[\text{kg}]$, $k=100[\text{N/m}]$, $C=0.5[\text{N/(m/s)}]$ であるとき、

- 減衰比: γ
- 固有角振動数: ω_n
- 減衰角振動数: ω_d
- 初期位相 ϕ , 振幅 A
- 減衰固有周期 $T_d = \frac{1}{f_d} = \frac{1}{\omega_d/2\pi}$ を求めよ

また、 $t=0.63\text{s}$, 1.26s における変位 x を求め、グラフを描け。