

次元解析と向き付けと超選択則¹

谷村 省吾²

名古屋大学大学院情報科学研究科

量の概念は、数の概念と並び立つ、人類の基本的数理能力の産物であり、その重要性はいくら強調してもしすぎることはないと思う。とくに自然物の記述方法としては、数よりも量の方が直接的であり、だからこそ量の理論は古典力学にも量子力学にも通底していると言える。しかし、量の理論は、教育上は単位系の定義と換算という技術的な側面だけが教えられることが多く、世界的に見ても物理学・工学の中で正当な地位を与えられているとは思えない。日本では1970年代に量の理論の構築・展開に数学者が積極的に関わっていたが、そういうムーブメントは下火になって久しいように見受けられる。

そういったふがない状況に活を入れるべく、量の理論について私なりに思うところを語りたい。このレジメは、私が語りたいと思う項目の羅列と、参考文献のリストである。また、なぜこの話題を量子論研究会で？と思われるだろうが、量子系の測定理論を考えると物理量の次元解析に正面から取り組まなければならないことがあり、量子系独特の問題と思われる超選択則も次元解析の延長上に捉えられるのである。

1 次元解析

量概念。和とスカラー倍（基本は正数倍）。量として捉えられるものは一様性・均質性を持つ。同質であること = 物理次元が等しいこと。

計量の発達段階：1) 直接比較，2) 間接比較，3) 個別単位，4) 標準単位，5) 組立単位系。

量の積概念。多重線形性。テンソル積。「質」の数値化・代数化 = 物理次元。物理次元がそろっているものだけ、和差・相等関係・大小関係が意味を持つ。

物理次元が異なるものを足してはいけないのか？

物理量代数の自己同形変換としてのスケール変換群。測定と無次元化。量と数。単位系。量の数値化。

量子力学ではどこで次元解析が現れるのか？ Planck 定数。center としての単位系。参照系。スペクトル値。期待値。

「いきおい系」と「しるし系」(西郷甲矢人君によるネーミング)。ベクトル量とアフィン量。双対性。Legendre 変換。current-potential 相互作用。

¹第1回 QUATUO 研究会，高知工科大学，2012年1月8日講演。2012年1月4日公開配布版。

²e-mail: tanimura[AT]is.nagoya-u.ac.jp

2 向き付け

有向量，無向量．移動と長さ．数値化するとき単位量に向きが必要な量．参照向き，基準向き．

「向き」という量．プラスマイナスの相対符号だけを値にとる量としての「向き」．基数と順序数．

外積代数．パリティ．極性と軸性．接と法．ヘリシティ．

パリティが異なる量を足してはいけないのか？

CPT. 荷電共役．時間反転． $V - A$ 理論．

	向きなし	向きあり
数	基数	順序数
量	無向量	有向量
分布	密度	勾配
積分	Lebesgue	Riemann
微分	Radon-Nikodym	Newton-Leibniz
微分形式	換形式	常形式
ベクトル	軸性ベクトル	極性ベクトル

表 1. 数量概念における向きの有無の対比

3 超選択則

超選択則って何？ユニヴァレンス超選択則．Wick, Wightman, Wigner (1952).

スケール・パリティ・ゲージ超選択則． \mathbb{R}_+ , \mathbb{Z}_2 , $U(1)$. 測定過程．孤立保存則と共変性と小澤の等号．超選択則定理．量子系は外部から測れない物理量を持ち得る．

参考文献

- [1] 雑誌『理系への数学』（現代数学社）の連載記事「21世紀の量子論入門」で，谷村は量の理論・測定理論を意識して超選択則について論じた：「第17回：計量と次元解析と超選択則」2011年9月号 pp.41-47. 「第18回：有向量とパリティと超選択則」2011年10月号 pp.42-48. 「第19回：ゲージ超選択則の力学的由来」2011年11月号 pp.47-53.
- [2] 測定理論の観点から超選択則を導出：S. Tanimura, “Superselection rules from measurement theory,” arXiv: 1112.5701 (2011).

- [3] 数量の概念は子供の発達・概念獲得にも関連するテーマである：森毅，市川徹 編「量数概論」明治図書 (1968). 遠山啓 編「数と量」明治図書 (1970). 銀林浩「量の世界・構造主義的分析」むぎ書房 (1975). 森毅「現代数学と数学教育」裳華房 (1976). 遠山啓「数学教育論シリーズ 5, 量とはなにか 1, 内包量・外延量」, 「数学教育論シリーズ 6, 量とはなにか 2, 多次元量・微分積分」太郎次郎社 (1978, 1981).
- [4] 量の理論の基本は線形代数とテンソル代数：小島順「線型代数」日本放送出版協会 (1976). 小島順「量の計算と線形代数」数学セミナー 1977年7月号 pp.18-43. 小島順「量の計算を見直す」数学セミナー 1977年8月号～1978年1月号.
- [5] 物理学・工学の観点から量の理論を徹底討論：高橋利衛「基礎工学セミナー：量の理論／現象の論理と法則の構造をめぐる討論」現代数学社 (1974). 高橋利衛「図説基礎工学対話：どのようにして量は捉えられたか／その歴史と論理と人物と」現代数学社 (1979).
- [6] 次元解析を解説している洋書は昔から多数あるが，残念ながら内容は技術的で平板なものが多い．新しい本の例を挙げておく：J. C. Gibbings, Dimensional Analysis, Springer (2011).
- [7] 次元解析の有用性を示す面白いエッセイ：中西襄「次元解析と数学者」数学・物理通信 1巻5号 (2010) (ネット閲覧可).
- [8] Fredrick I. Olness (QCDのくりこみ群の研究者)の web page, <http://www.physics.smu.edu/~olness/www/index.html> 「Snowmass 村，設立 1967 年，標高 8368 フィート，人口 1822 人，合計 12,157」という看板の写真．
- [9] 捩^{ねい}形式は奇種の形式とも呼ばれ，de Rham と Schwartz が導入・発展させた概念表記法である．捩形式はものごとの的を得た表現方法であり，確かに便利なのだが，残念ながらあまり普及していない．よい文献があるので，ぜひ参考にしてほしい．とくに小島順による解説がわかりやすい．小島順「量の計算を見直す 第 5, 6 回」数学セミナー 1977年12月号 p.52, 1978年1月号 p.68. シュヴァルツ (小島順訳)「解析学 5, 微分法」東京図書 (1971). シュワルツ (岩村・石垣・鈴木訳)「超函数の理論」(原著第 3 版の翻訳)岩波書店 (1971). ド・ラーム (高橋恒郎訳)「微分多様体：微分形式・カレント・調和形式」東京図書 (1974). J. A. Schouten, Tensor Analysis for Physicists, 2nd ed. Dover (1989, 初出は Clarendon Press, 1951). 北野正雄「マクスウェル方程式：電磁気学のよりよい理解のために」サイエンス社 (2009, 初出は 2005).

- [10] 外積代数について：谷村省吾「トポロジー・圏論・微分幾何」サイエンス社 (2006) 第 6.7 節.
- [11] J. C. Maxwell, A Treatise on Electricity and Magnetism (初版 1873) は電磁気学の基礎を築いた有名な本だが, Maxwell はこの本の 1 節から 6 節にかけてかなりの紙数を割いて物理量の次元・単位を解説しており, 23 節では右手系・左手系の説明に心を砕いている.
- [12] 超選択則と混合状態に関する誤解を正す議論を小嶋泉氏が展開している：大矢雅則, 小嶋泉 編著「量子情報と進化の力学」牧野書店 (1996) 第 I 部第 2 章. 小嶋泉『量子論の基礎概念：その物理的解釈と超選択則』数理科学 2002 年 7 月号 p.36.
- [13] 超選択則を誤解している本や論文の例：湯川秀樹, 豊田利幸 編著「量子力学 I」岩波書店 (1978) 4.6 節. 同「量子力学 II」16.1 節の記述も微妙. Y. Aharonov and L. Susskind, “Charge superselection rule,” Phys. Rev. **155**, 1428 (1967). C. Cisneros, R. P. Martínez-y-Romero, H. N. Núñez-Yépez, and A. L. Salas-Brito, “Limitations on the superposition principle: superselection rules in non-relativistic quantum mechanics,” Eur. J. Phys. **19**, 237 (1998).