弱測定を用いた状態推定

小林 弘和[1], 鹿野豊 [2]

高知工科大学 [1], 分子科学研究所 [2]

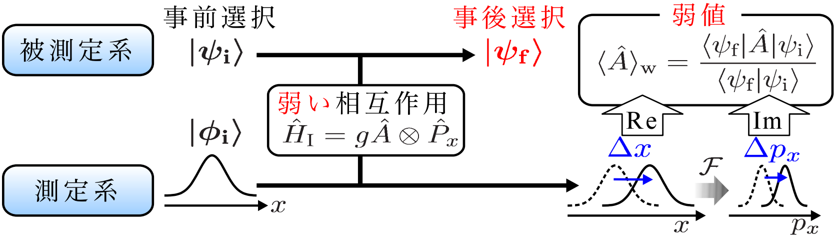
第 3 回 QUATUO 研究会

arXiv:1311.3357

2014/1/12

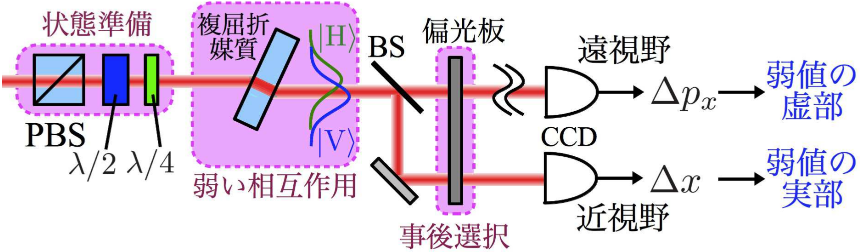
弱値と弱測定

- 被測定系の事後選択を伴う弱い量子測定
  Y. Aharonov *et al.*, Phys. Rev. Lett. **60**, 1351 (1988)
- 弱値 $\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}}$ は複素数で期待値の範囲外の値をとりうる
- 測定系のガウス波束の移動として弱値 $\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}}$ を取得
  - 平均位置の移動 $\Delta x \propto \mathrm{Re}\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}}$
  - 平均運動量の移動 $\Delta p_x \propto \mathrm{Im}\langle\hat{A}\rangle_{\mathrm{w}}$



弱測定を利用した波動関数の直接観測

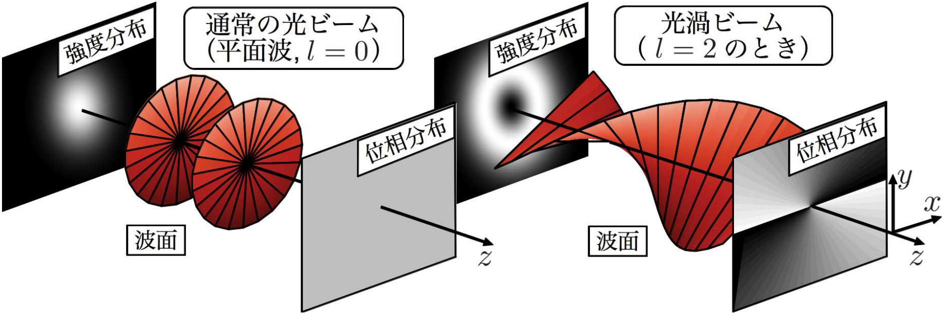
- 波動関数 (複素関数) を弱値に対応させて弱測定で観測
  →post-processing が必要ない
  - 空間分布 J. S. Lundeen *et al.*, Nature **474**, 188 (2011)
  - 偏光状態 J. Z. Salvail *et al.*, Nat. Photonics **7**, 316 (2013)
  - 空間モード分布 M. Malik *et al.*, arXiv:1306.0619



弱値の実部と虚部の取得に個別の実験系が必要
→ ガウシアンビームを測定系としているから

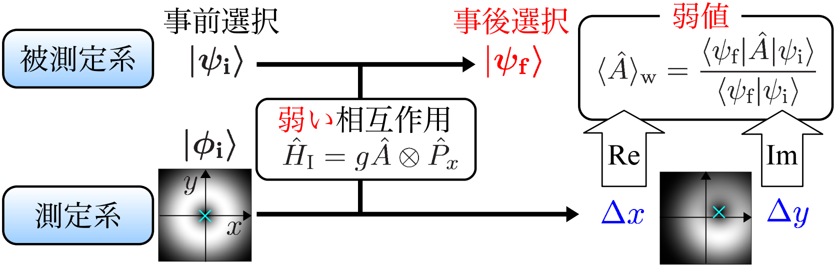
光渦ビーム (ラゲールガウスビーム)

- 中心に強度 0 の暗点 (Zero Intensity Point, ZIP)
- ドーナツ型の強度分布とらせん状の等位相面
- 動径モード p (輪の数) と方位モード l (位相の変化量)
  今回は $p = 0$, $l = +1$ を用いる
- 軌道角運動量 $l\hbar$ を持つ



光渦ビームを用いた弱測定

- 測定系：光渦ビーム
  H. Kobayashi *et al.*, Phys. Rev. A **86**, 053805 (2012)
  G. Puentes *et al.*, Phys. Rev. Lett. **109**, 040401 (2012)
- 位相特異点の二次元的な移動量から弱値を取得
  - x 方向移動量　$\Delta x \propto \mathrm{Re}\langle \hat{A} \rangle_{\mathrm{w}}$
  - y 方向移動量　$\Delta y \propto \mathrm{Im}\langle \hat{A} \rangle_{\mathrm{w}}$

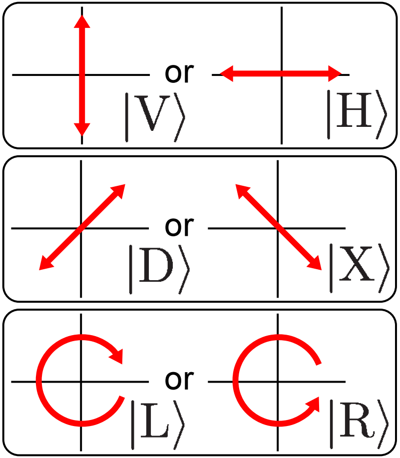


本研究の目的

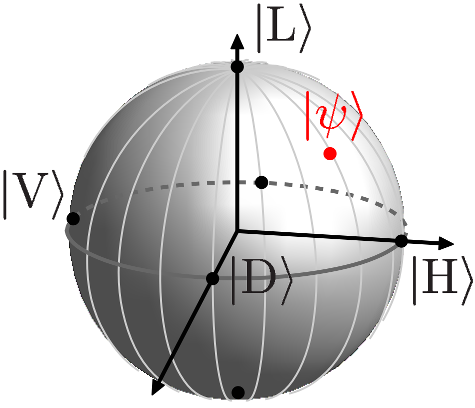
光渦ビームを用いた弱測定による偏光状態の直接観測

偏光の測定と状態空間

偏光の測定：2 値



状態空間：2 次元球面

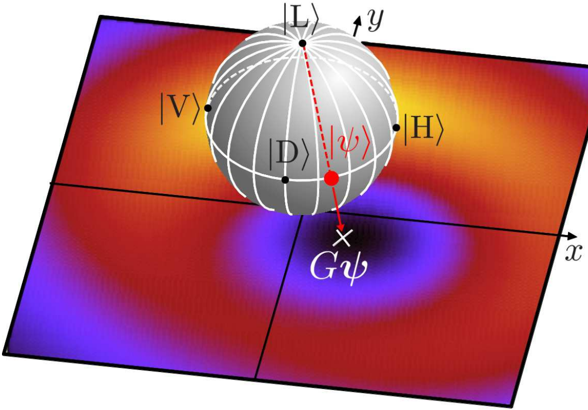


ポアンカレ球

偏光状態の弱値とステレオ射影

- 未知の偏光状態：$|\psi\rangle = \cos\theta|\mathsf{R}\rangle + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\sin\theta|\mathsf{L}\rangle$
- 事後選択：$|\mathsf{R}\rangle$，観測量 $\hat{\sigma}_x = |\mathsf{R}\rangle\langle\mathsf{L}| + |\mathsf{L}\rangle\langle\mathsf{R}|$
- $\langle\hat{\sigma}_x\rangle_{\mathsf{w}} = \dfrac{\langle\mathsf{R}|\hat{\sigma}_x|\psi\rangle}{\langle\mathsf{R}|\psi\rangle} = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}}{\tan\theta}$

  $\rightarrow$ ステレオ射影点：$G\psi \equiv G(\mathrm{Re}\langle\hat{\sigma}_x\rangle_{\mathsf{w}}, \mathrm{Im}\langle\hat{\sigma}_x\rangle_{\mathsf{w}})$



Weak measurement of stereographical projection point

初期状態

未知の偏光状態：$|\psi\rangle$

測定系の初期状態：光渦ビーム

$$\phi_{\mathsf{i}}(x,y) \propto (x+\mathrm{i}y)^{l} \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4W_0^2}\right)$$

ZIP

相互作用：$\hat{H} = \hbar G \delta(t) \hat{\sigma}_x \otimes \hat{P}_x$

事後選択：$\langle \mathsf{R}|$

弱条件　：$\dfrac{W_0}{G} \gg \max\left(1, |\langle \hat{\sigma}_x \rangle_{\mathsf{w}}|\right)$

終状態

$$\phi_{\mathsf{f}}(x,y) = \langle 1|\psi\rangle \phi_{\mathsf{i}}(x - G\langle \hat{\sigma}_x \rangle_{\mathsf{w}}, y)$$

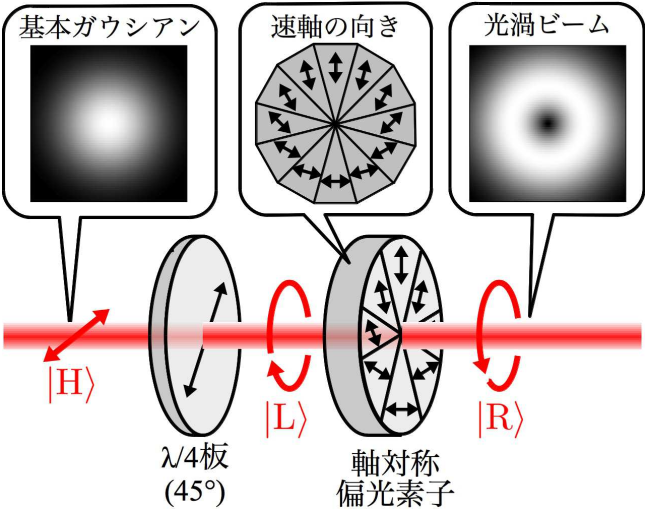
$$\downarrow$$

$$|\phi_{\mathsf{f}}(x,y)|^2 \propto |x - G \cdot \mathrm{Re}\langle \hat{\sigma}_x \rangle_{\mathsf{w}} + \mathrm{i}(y - G \cdot \mathrm{Im}\langle \hat{\sigma}_x \rangle_{\mathsf{w}})|^2 \times (\text{Gaussian})$$

ZIP

光渦ビームの生成法

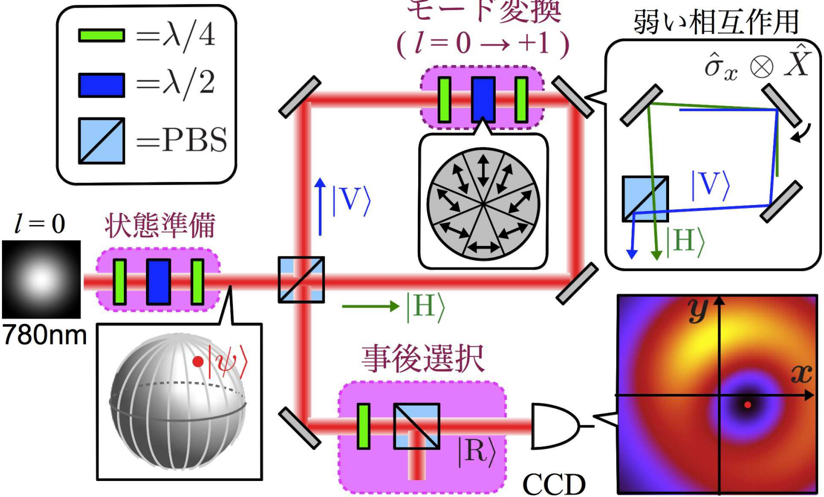
- 軸対称偏光素子：$\lambda/2$ 板の速軸が方位角によって異なる
- 円偏光（$l = 0$） → 軸対称偏光素子 → 円偏光（$l = \pm 1$）



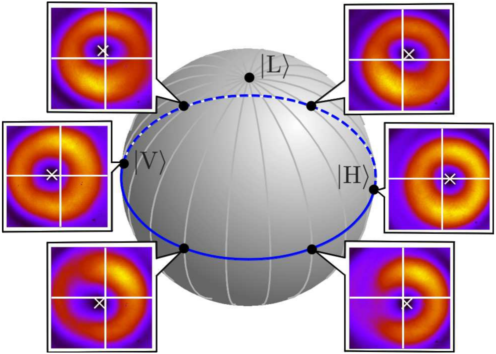
光渦を利用した弱測定による偏光状態測定の実験系

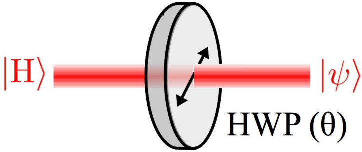
偏光サニャック干渉計を用いて

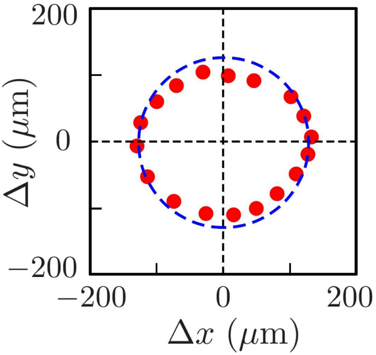
- モード変換 $|\psi\rangle \otimes |l=0\rangle \to |\psi\rangle \otimes |l=+1\rangle$
- 鏡による微小偏向 $\hat{H} \propto \hat{\sigma}_x \otimes \hat{X}$



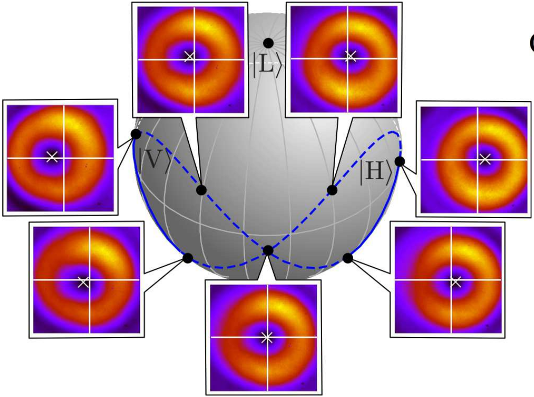
直線偏光状態の直接観測

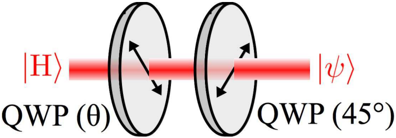


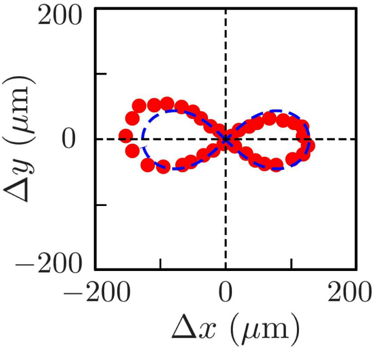




八の字経路上の偏光状態の直接観測



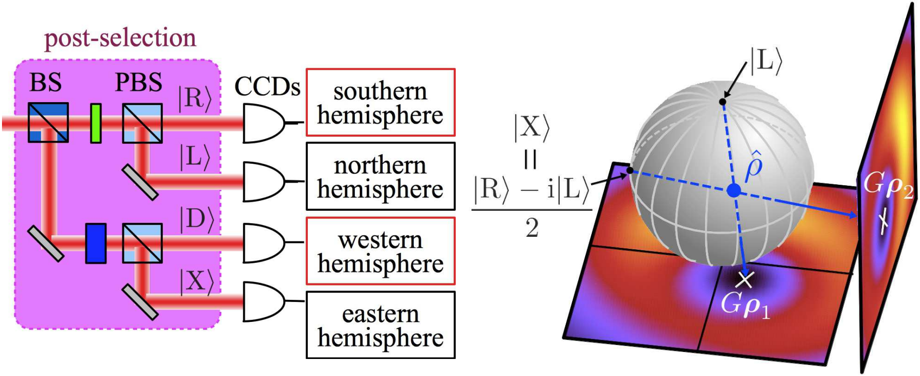




まとめ

- 光渦ビームを測定系とした弱測定を用いた偏光状態の測定手法を提案
- 位相特異点の移動量 Δx, Δy からポアンカレ球のステレオ射影を観測
- CCD を用いて位相特異点の位置と偏光状態が直接対応することを確認
- arXiv:1311.3357

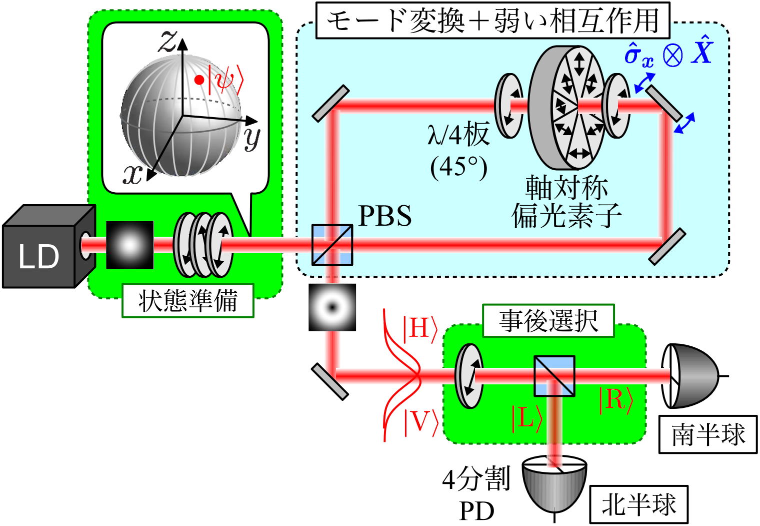
今後の展開



- CCD カメラによる ZIP の二次元位置取得
  → 強度の平均位置 (4ch フォトダイオード)
- 北半球と南半球を別々に観測
- 混合状態の直接観測
- 他の空間モード ($p \neq 0$ のラゲールガウス，エルミートガウス，ハイパージオメトリックガウス) やその重ね合わせの利用

4 分割 PD を用いた実験系

- 4 分割 PD を用いて平均位置のみを取得
- 4 分割 PD を 2 個用いて北半球と南半球を別々に取得
- 北半球 PD と南半球 PD の強度比を用いて混合状態を観測

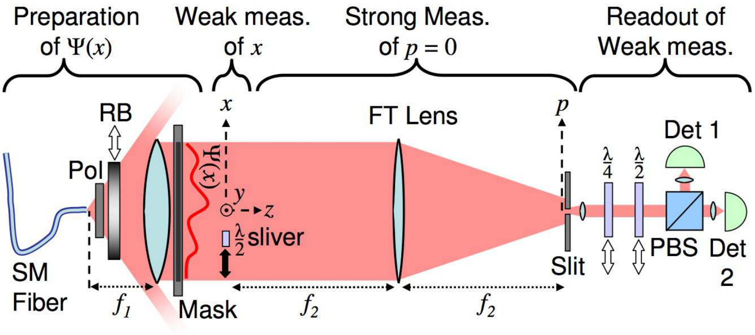


弱測定を利用した波動関数の直接観測

- 空間分布 J. S. Lundeen *et al.*, Nature **474**, 188 (2011)
- 偏光状態 J. Z. Salvail *et al.*, Nat. Photonics **7**, 316 (2013)
- 空間モード分布 M. Malik *et al.*, arXiv:1306.0619

未知の状態：$|\psi\rangle$, 事後選択：$|p_0\rangle$

$$\Big\langle |x\rangle\langle x| \Big\rangle_{\mathrm{w}} = \frac{\langle p_0|x\rangle\langle x|\psi\rangle}{\langle p_0|\psi\rangle} \propto \psi(x)$$



弱測定における近似

- 相互作用：$\hat{H} = g\delta(t)\hat{A}\otimes\hat{P}_x \to \hat{U} = \exp\left(-\mathrm{i}\frac{g}{\hbar}\hat{A}\otimes\hat{P}_x\right)$
- 被測定状態：$|\psi_\mathsf{i}\rangle \xrightarrow{\text{事後選択}} |\psi_\mathsf{f}\rangle$，測定状態：$|\phi_\mathsf{i}\rangle \to |\phi_\mathsf{f}\rangle$

$$||\Psi_\mathsf{i}\rangle\rangle = |\psi_\mathsf{i}\rangle\otimes|\phi_\mathsf{i}\rangle$$

$$\downarrow \text{時間発展 } \hat{U} + \text{事後選択 } \langle\psi_\mathsf{f}|$$

$$|\phi_\mathsf{f}\rangle = \langle\psi_\mathsf{f}|\hat{U}|\psi_\mathsf{i}\rangle|\phi_\mathsf{i}\rangle \simeq \langle\psi_\mathsf{f}|\psi_\mathsf{i}\rangle\left(\hat{I} - \mathrm{i}\frac{g}{\hbar}\langle\hat{A}\rangle_\mathsf{w}\hat{P}_x\right)|\psi_\mathsf{i}\rangle$$

$$\simeq \langle\psi_\mathsf{f}|\psi_\mathsf{i}\rangle\exp\left(-\mathrm{i}\frac{g}{\hbar}\langle\hat{A}\rangle_\mathsf{w}\hat{P}_x\right)|\psi_\mathsf{i}\rangle$$

位置 x の平行移動演算子

弱条件

測定状態の波束の幅 Δx に対して

$$\Delta x \gg \max_{n\geq 2}\left[g\left|\langle\hat{A}\rangle_\mathsf{w}\right|, g\left|\frac{\langle\psi_\mathsf{f}|\hat{A}^n|\psi_\mathsf{i}\rangle}{\langle\psi_\mathsf{f}|\hat{A}|\psi_\mathsf{i}\rangle}\right|^{1/(n-1)}\right]$$

相互作用後の測定系の状態と弱条件

弱条件

$$\frac{\sigma}{G} \gg \max\left(1, |\langle\sigma_x\rangle_{\mathsf{w}}|\right)$$

- 初期プローブ状態 $\phi_{\mathsf{i}}(x,y)$：光渦ビーム

$$\phi_{\mathsf{i}}(x,y) = N\{x + i\cdot \mathsf{sgn}(l)y\}^{|l|}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4\sigma^2}\right)$$

- 相互作用後の測定系の状態

$$\begin{aligned}\phi_{\mathsf{f}}(x,y) = \frac{\langle\circlearrowleft|\psi\rangle}{2}\Big\{&\left(1 - \langle\hat{\sigma}_x\rangle_{\mathsf{w}}\right)\phi_{\mathsf{i}}(x+G,y)\\ &+ \left(1 + \langle\hat{\sigma}_x\rangle_{\mathsf{w}}\right)\phi_{\mathsf{i}}(x-G,y)\Big\}\end{aligned}$$

$$\xrightarrow{\text{弱条件}} \phi_{\mathsf{f}}(x,y) = \langle\circlearrowleft|\psi\rangle\phi_{\mathsf{i}}(x - G\langle\hat{\sigma}_x\rangle_{\mathsf{w}}, y)$$

光渦ビーム $(l=-1)$ の平均位置の厳密解

$$\langle\hat{X}\rangle_{\mathsf{f}} = \frac{G\cdot\mathrm{Re}\langle\hat{\sigma}_x\rangle_{\mathsf{w}}}{\frac{1}{2}\left\{1+|\langle\hat{\sigma}_x\rangle_{\mathsf{w}}|^2+(1-|\langle\hat{\sigma}_x\rangle_{\mathsf{w}}|^2)\left(1-\frac{G^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{e}^{-G^2/2\sigma^2}\right\}}$$

$$= \frac{G\cos\phi\sin\theta}{1-\cos\theta\left(1-\frac{G^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{e}^{-G^2/2\sigma^2}}$$

$$\xrightarrow{\text{弱条件}} G\cdot\mathrm{Re}\langle\hat{\sigma}_x\rangle_{\mathsf{w}}$$

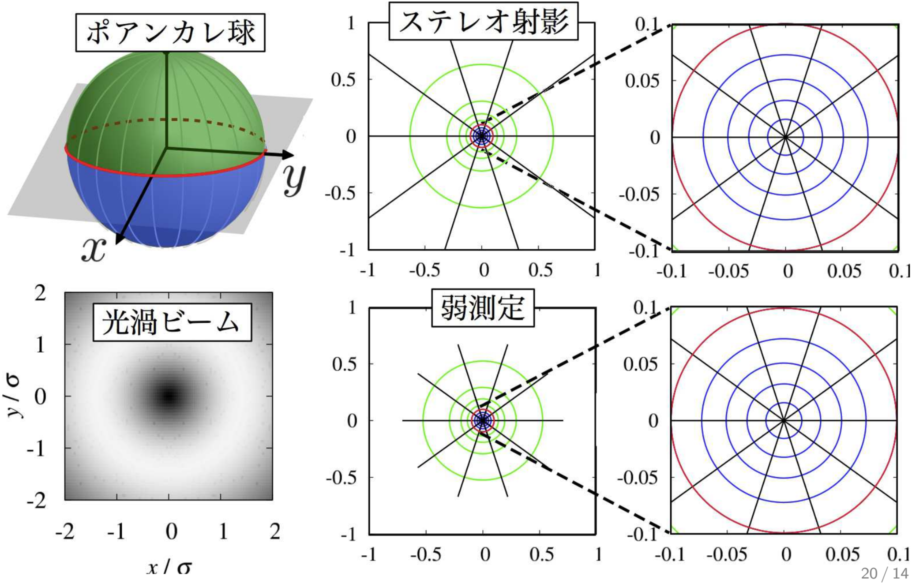
$$\langle\hat{Y}\rangle_{\mathsf{f}} = \frac{G\cdot\mathrm{e}^{-G^2/2\sigma^2}\cdot\mathrm{Im}\langle\hat{\sigma}_x\rangle_{\mathsf{w}}}{\frac{1}{2}\left\{1+|\langle\hat{\sigma}_x\rangle_{\mathsf{w}}|^2+(1-|\langle\hat{\sigma}_x\rangle_{\mathsf{w}}|^2)\left(1-\frac{G^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{e}^{-G^2/2\sigma^2}\right\}}$$

$$= \frac{G\mathrm{e}^{-G^2/2\sigma^2}\sin\phi\sin\theta}{1-\cos\theta\left(1-\frac{G^2}{2\sigma^2}\right)\mathrm{e}^{-G^2/2\sigma^2}}$$

$$\xrightarrow{\text{弱条件}} G\cdot\mathrm{Im}\langle\hat{\sigma}_x\rangle_{\mathsf{w}}$$

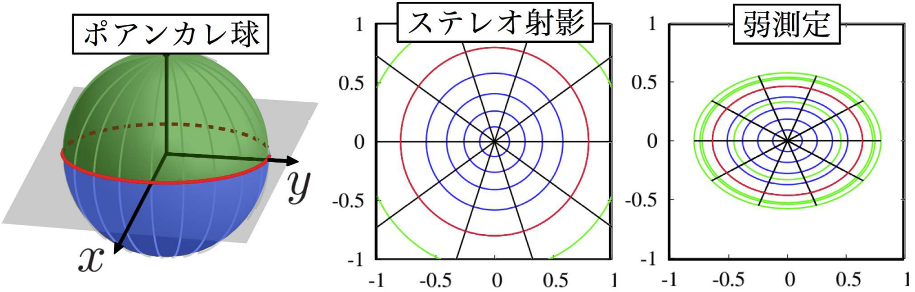
ステレオ射影と弱測定 ($\sigma/G = 10$ のとき)

- $\langle \hat{\sigma}_x \rangle_{\mathrm{w}} < 1$ (南半球) のとき $\rightarrow$ 弱条件成立
- $\langle \hat{\sigma}_x \rangle_{\mathrm{w}} \gg 1$ (北極付近) のとき $\rightarrow$ 弱条件不成立



ステレオ射影と弱測定 ($\sigma/G = 1.25$ のとき)

- $\langle \hat{\sigma}_x \rangle_{\mathrm{w}} < 1$ でも弱条件不成立
- y 方向がつぶれてしまう
- 北半球と南半球の位置が分離されない
  $\rightarrow$ 北半球と南半球を別々に観測する必要性

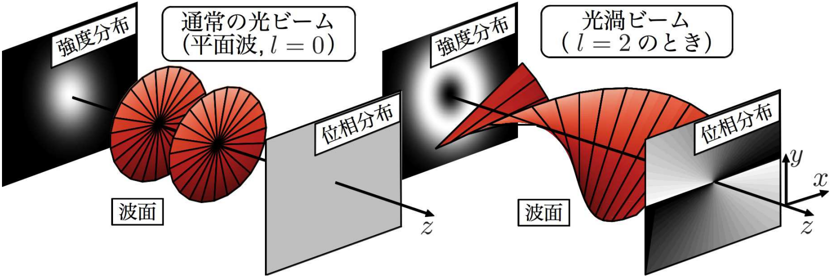


光渦ビーム (ラゲールガウスモード)

- ドーナツ型の強度分布とらせん状の等位相面
- 動径モード p (輪の数) と方位モード l (位相の変化量)
- $|l| > 0$ のとき x 方向と y 方向に分離不可能
- $p = 0$ の場合

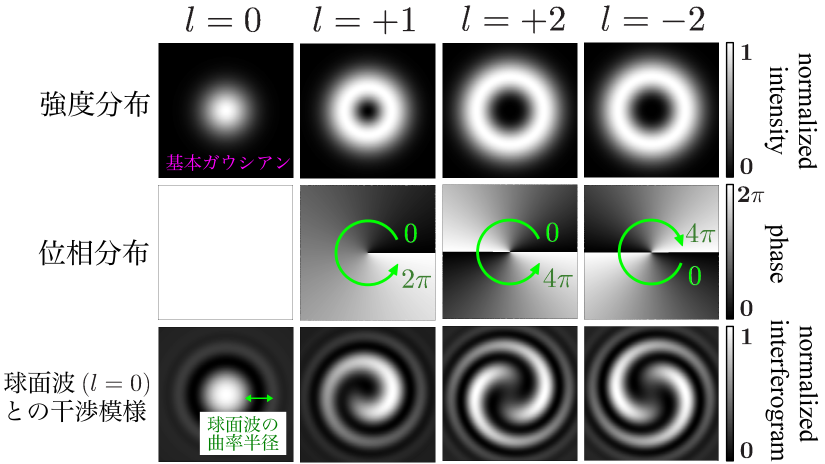
$$\phi_l(x, y) = N r^{|l|} \mathrm{e}^{il\phi} \exp\left(-\frac{r^2}{4\sigma^2}\right) \qquad [\text{極座標 } (r, \phi)]$$

$$= N\{x + i \cdot \mathrm{sgn}(l) y\}^{|l|} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{4\sigma^2}\right)$$



ヘリカルビームの特徴

- 無限個の空間モード $(l = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$
- x-y 平面内で位相が $0 \sim 2\pi l$ まで変化
- 軌道角運動量 $l\hbar$ を持つ

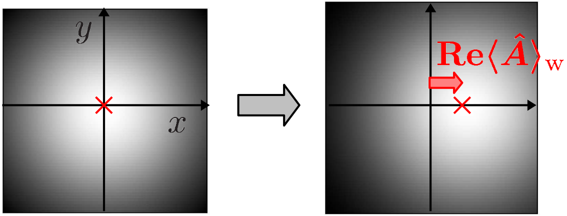


測定系の空間的な強度分布の変化

x 方向のみ相互作用した時 $\hat{H} = g\hat{A} \otimes \hat{P}_x$

$$\Delta x \propto \mathrm{Re}\langle \hat{A} \rangle_{\mathrm{w}} \quad , \quad \Delta y = 0$$

- $l = 0$ (基本ガウスモード) の場合



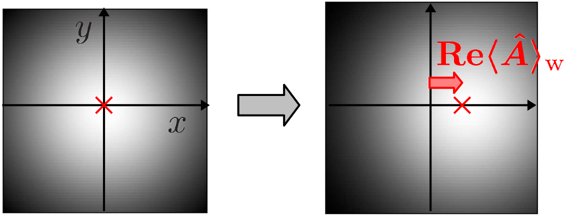
- $|l| > 0$ の場合

測定系の空間的な強度分布の変化

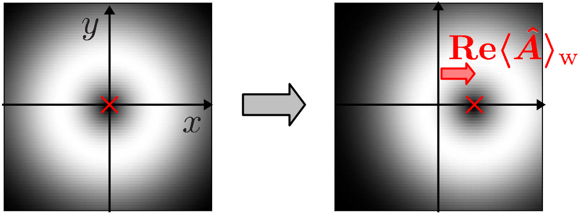
x 方向のみ相互作用した時 $\hat{H} = g\hat{A} \otimes \hat{P}_x$

$$\Delta x \propto \mathrm{Re}\langle \hat{A} \rangle_{\mathrm{w}} \ , \ \Delta y = 0$$

- $l = 0$ (基本ガウスモード) の場合



- $|l| > 0$ の場合

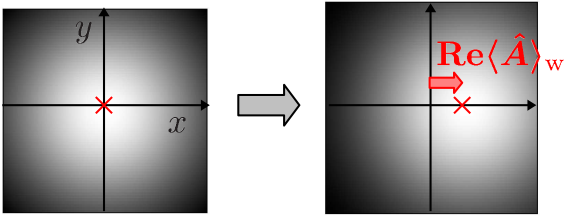


測定系の空間的な強度分布の変化

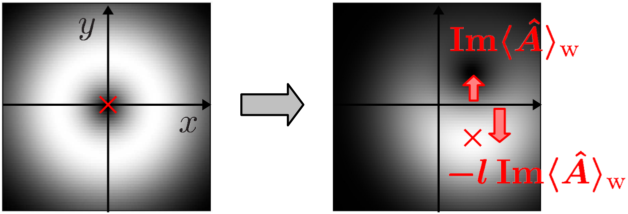
x 方向のみ相互作用した時 $\hat{H} = g\hat{A} \otimes \hat{P}_x$

$$\Delta x \propto \mathrm{Re}\langle \hat{A} \rangle_{\mathrm{w}} \quad , \quad \Delta y \propto -l\, \mathrm{Im}\langle \hat{A} \rangle_{\mathrm{w}}$$

- $l = 0$ (基本ガウスモード) の場合



- $|l| > 0$ の場合： 強度分布の回転対称性が破れる

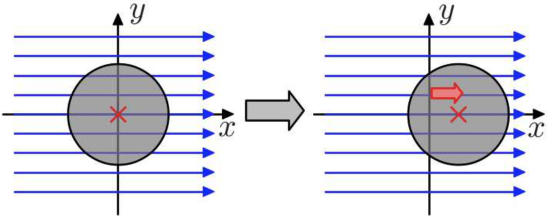


測定系の空間的な強度分布の変化

x 方向のみ相互作用した時 $\hat{H} = g\hat{A} \otimes \hat{P}_x$

$$\Delta x \propto \mathrm{Re}\langle \hat{A} \rangle_{\mathrm{w}} \quad , \qquad \Delta y \propto -l\,\mathrm{Im}\langle \hat{A} \rangle_{\mathrm{w}}$$

- $l = 0$ (基本ガウスモード) の場合



- $|l| > 0$ の場合：強度分布の回転対称性が破れる