量子連続測定における混合状態とそのエントロピーの収束条件

布田 徹　北海道大学大学院 理学院 数学専攻

1　混合状態に対する連続測定

$\mathcal{H}$ を量子系 $\mathcal{S}$ の状態の可分な複素ヒルベルト空間であるとし，$\mathcal{H}$ の次元を $d(\leq \infty)$ とする．$\mathfrak{B}(\mathcal{H}), \mathfrak{C}(\mathcal{H}), \mathfrak{T}(\mathcal{H}), \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ をそれぞれ $\mathcal{H}$ 上の有界作用素，コンパクト作用素，トレースクラス作用素，密度作用素の全体からなる集合とする．トレースノルムを $\|\cdot\|_1 := \mathrm{Tr}|\cdot|$ とする．量子系 $\mathcal{S}$ のハミルトニアンが自己共役作用素 H で表されているとし，$D(H)$ で H の定義域を表すことにする．

1. **（ユニタリチャンネル）** $\mathcal{H}$ 上のユニタリ作用素 U に対して，
$$\mathcal{E}_U \rho := U\rho U^*,\ \forall \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}).$$
特に，$\mathcal{E}_t := \mathcal{E}_{e^{-itH}}$ と略記．
2. **（射影チャンネル）** $\mathfrak{P} := \{P_n\}_n$ を $P_m \perp P_n\ (m \neq n), I = \sum_n P_n$ を満たす $\mathcal{H}$ 上の射影作用素の族とする．このとき，
$$\mathcal{E}_{\mathfrak{P}} \rho := \sum_n P_n \rho P_n,\ \forall \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}).$$

量子系 $\mathcal{S}$ の状態 $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ を任意に一つ固定する．
$$\rho = \sum_{n=1}^{d} \lambda_n |\Psi_n\rangle\langle\Psi_n| \tag{1.1}$$
を ρ のシャッテン分解（の一つ）とする．ただし，λ_n は多重度も込めて考え，$\{\Psi_n\}_{n=1}^d$ が $\mathcal{H}$ の完全正規直交系 (CONS) となるようにしておく．

任意に時刻 $\tau > 0$ を一つ固定する．分解 (1.1) に対し，$\{\Psi_n(t)\}_{n=1}^d$ を $\Psi_n(0) = \Psi_n\ (1 \leq \forall n \leq d)$ を満たす，時刻パラメータ $t \in [0,\tau]$ を持つ $\mathcal{H}$ の CONS であるとし，$\mathfrak{P}(t) := \{|\Psi_n(t)\rangle\langle\Psi_n(t)|\}_n$ とする．

Δ を区間 $[0,\tau]$ の任意の分割で $\Delta : 0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{N-1} < t_N = \tau$ であるものとし，$k = 1,\cdots,N$ に対して $\Delta_k := t_k - t_{k-1}, |\Delta| := \max_{1\leq k\leq N} \Delta_k$ とおく．$\rho_\Delta(\tau) \in \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ を次のように定義する：
$$\rho_\Delta(\tau) := \mathcal{E}_{\mathfrak{P}(t_N)} \circ \mathcal{E}_{\Delta_N} \circ \mathcal{E}_{\mathfrak{P}(t_{N-1})} \circ \mathcal{E}_{\Delta_{N-1}} \circ \cdots \circ \mathcal{E}_{\mathfrak{P}(t_1)} \circ \mathcal{E}_{\Delta_1} \rho. \tag{1.2}$$

$\rho_\Delta(\tau)$ は，物理的には Δ の各分点で，それぞれ射影作用素の族 $\mathfrak{P}(t_1),\cdots,\mathfrak{P}(t_N)$ による量子測定を行ったときの終状態である．

直接計算により，次式がわかる：
$$\rho_\Delta(\tau) = \sum_k \lambda_{\Delta,k} |\Psi_k(\tau)\rangle\langle\Psi_k(\tau)|,$$
$$\lambda_{\Delta,k} := \sum_{k_0,\cdots,k_{N-1}} \lambda_{k_0} \prod_{j=1}^{N} \left|\langle \Psi_{k_j}(t_j), e^{-i\Delta_j H}\Psi_{k_{j-1}}(t_{j-1})\rangle\right|^2. \quad (k_N = k).$$

1.1　各点収束

定理 1.1 ある $k \in \mathbb{N}$ が存在し，以下の条件を満たすと仮定する：
$$\forall \lambda \in [0,\tau], \quad \Psi_k(\lambda) \in D(H), \tag{1.3}$$
$$\xi_k := \sup_{0\leq\lambda\leq t} \|H\Psi_k(\lambda)\| < \infty, \tag{1.4}$$
$$\eta_k := \sup_{\substack{\lambda,\nu\in[0,t]\\ \lambda\neq\nu}} \frac{\|\Psi_k(\lambda) - \Psi_k(\nu)\|}{|\lambda - \nu|} < \infty, \tag{1.5}$$
$$\lim_{|\Delta|\to 0} \sum_{j=1}^{N} \mathrm{Re}\, \langle \Psi_k(t_j) - \Psi_k(t_{j-1}), \Psi_k(t_{j-1})\rangle = 0. \tag{1.6}$$
このとき，$\lim_{|\Delta|\to 0} \lambda_{\Delta,k} = \lambda_k$. が成り立つ．

系 1.2 ある $k \in \mathbb{N}$ が存在し，以下の条件を満たすとする：
$$\Psi_k(\cdot) : [0,\tau] \to \mathcal{H} \text{ は強微分可能}, \tag{1.7}$$
$$\forall \lambda \in [0,\tau], \quad \Psi_k(\lambda) \in D(H), \tag{1.8}$$
$$\xi_k < \infty, \tag{1.9}$$
$$\sup_{0\leq\lambda\leq\tau} \|\Psi_k'(\lambda)\| < \infty. \tag{1.10}$$
このとき，$\lim_{|\Delta|\to 0} \lambda_{\Delta,k} = \lambda_k$ が成り立つ．

1.2　トレースノルム収束

分解 (1.1) で与えられる ρ に対して，$\rho(t)$ を次のように定義する：
$$\rho(t) := \sum_n \lambda_n |\Psi_n(t)\rangle\langle\Psi_n(t)|, \quad \forall t \in [0,\tau]. \tag{1.11}$$

定理 1.3 $\lambda_k > 0$ なる任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して定理 *1.1* の仮定 *(1.3)–(1.6)* が満たされているとする．このとき，次式が成り立つ：
$$\lim_{|\Delta|\to 0} \|\rho_\Delta(\tau) - \rho(\tau)\|_1 = 0. \tag{1.12}$$

系 1.4 $\lambda_k > 0$ なる任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して系 *1.2* の仮定 *(1.7)–(1.10)* が満たされているとすると，$\lim_{|\Delta|\to 0} \|\rho_\Delta(\tau) - \rho(\tau)\|_1 = 0$.

$d < \infty$ の場合，任意の初期状態に対して測定の方法を工夫することにより，**任意のユニタリチャンネルを連続測定によって近似できる**．

1.3　量子ゼノン効果 (QZE) への応用

$\lambda_k > 0$ なる任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して $\Psi_k \in D(H)$ かつ $\Psi_k(\lambda) = \Psi_k\ (\forall\lambda \in [0,\tau])$ であるとすると，定理 1.3 により $\lim_{|\Delta|\to 0} \|\rho_\Delta(\tau) - \rho(\tau)\|_1 = 0$.

2　フォン・ノイマン (v.N.) エントロピーの収束

関数 $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ を $\varphi(\lambda) := -\lambda \log \lambda$ により定義する．ただし，$\varphi(0) := 0$．$S(\rho)$ を $\rho \in \mathfrak{S}$ に対する v.N. エントロピーとする．

$d < \infty$ のとき，v.N. エントロピーはトレースノルムに対して連続であるが，$d = \infty$ のとき，一般に v.N. エントロピーはトレースノルムに関して連続とは限らない．以下では，$\dim \mathcal{H} = \infty$ であるとする．

定理 2.1 任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して *(1.3)–(1.5)* が成り立ち，$\lambda_k > 0$ なる任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して *(1.6)* が成り立つと仮定．さらに，次を仮定：
$$\xi_k \to 0, \quad \eta_k \to 0\ (k \to \infty), \tag{2.1}$$
$$S(\rho) < \infty, \quad \sum_k \varphi(\xi_k^2) < \infty, \quad \sum_k \varphi(\eta_k^2) < \infty. \tag{2.2}$$
このとき，$\lim_{|\Delta|\to 0} S(\rho_\Delta(\tau)) = S(\rho(\tau)) = S(\rho)$ が成り立つ．

注意 2.2 $H \in \mathfrak{B}(\mathcal{H}),\ \xi_k \to 0,\ \sum_k \varphi(\xi_k^2) < \infty\ \Rightarrow \varphi(H^2) \in \mathfrak{T}(\mathcal{H})$.

例 2.3 物理量 A が H に関する保存量であるとし，かつ $A, H \in \mathfrak{C}(\mathcal{H})$ であるとする．さらに，次の条件が満たされているとする：
$$\forall k \in \mathbb{N},\ \forall \lambda \in [0,\tau],\ \Psi_k(\lambda) = e^{-i\lambda A}\Psi_k,\ S(\rho) < \infty,$$
$$\sum_k \varphi(\|H\Psi_k\|^2) < \infty,\ \sum_k \varphi(\|A\Psi_k\|^2) < \infty.$$
このとき，定理 *2.1* の仮定を満たすので，$\lim_{|\Delta|\to 0} S(\rho_\Delta(\tau)) = S(\rho)$.

$A = 0$ のとき，QZE に対する v.N. エントロピーの収束条件を得る：
$$\left.\begin{array}{c} H \in \mathfrak{C}(\mathcal{H}),\ \Psi_k(\lambda) = \Psi_k\ (\forall k \in \mathbb{N},\ \forall \lambda \in [0,\tau]), \\ S(\rho) < \infty,\ \sum_k \varphi(\|H\Psi_k\|^2) < \infty \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{|\Delta|\to 0} S(\rho_\Delta(\tau)) = S(\rho).$$

参考文献

[1] A. Arai and T. Fuda, Some mathematical aspects of quantum Zeno effect, *Lett. Math. Phys.* **100** (2012), 245–260.

[2] T. Fuda, Convergence Conditions of Mixed States and their von Neumann Entropy in Continuous Quantum Measurements, arXiv:1312.2028.

[3] E. H. Lieb and M. B. Ruskai, Proof of the strong subadditivity of quantum-mechanical entropy (with an appendix by B. Simon), *J. Math. Phys.* **14** (1973), 1938–1941.

[4] B. Misra and E. C. G. Sudarshan, The Zeno's paradox in quantum theory, *J. Math. Phys.* **18** (1977), 756–763.