第2回QUATUO研究会
2013年1月5日　高知工科大学

光子の局在化問題
Photon Localization Problem

谷村 省吾
TANIMURA Shogo
名古屋大学情報科学研究科

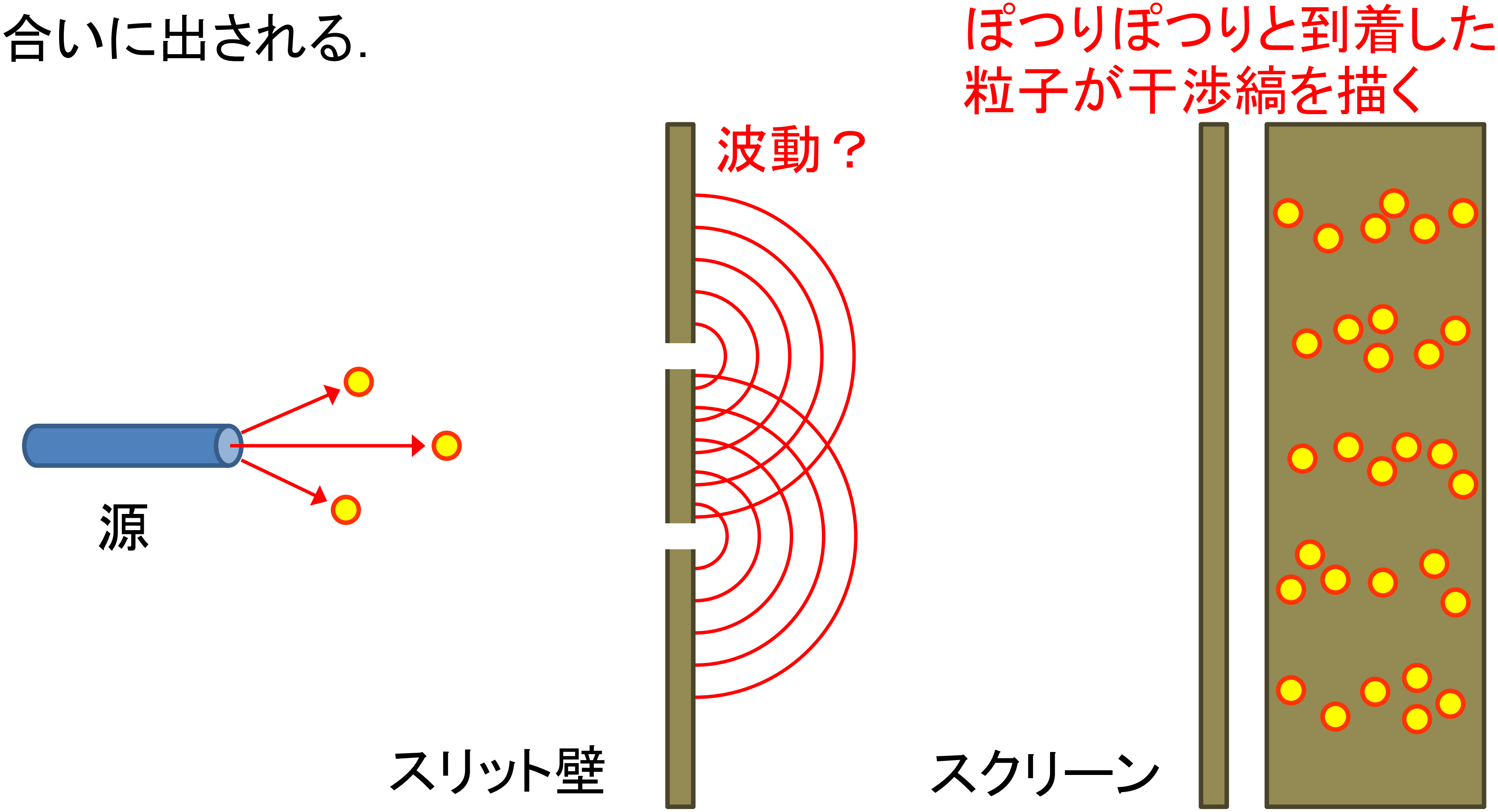
本研究の位置づけ

本研究は，私にとっては大貫義郎氏（名古屋大学名誉教授）による2009年8月のセミナーを聴いたことをきっかけとし，それ以来継続している同氏との議論に基づいています．しかし，大貫氏はそのセミナー以前からこの問題を意識しておられたし，解決にむけて独自のアイディアを持っておられます．今回私の講演内容は大貫氏が唱えているアプローチとは若干異なっており，今回は私の責任において発表を行いました．

2013年1月　　谷村省吾

量子力学の教科書のお決まりの例題:
光や電子のダブルスリット実験

粒子と波動の二重性・量子力学的振る舞いの典型例として引き合いに出される.



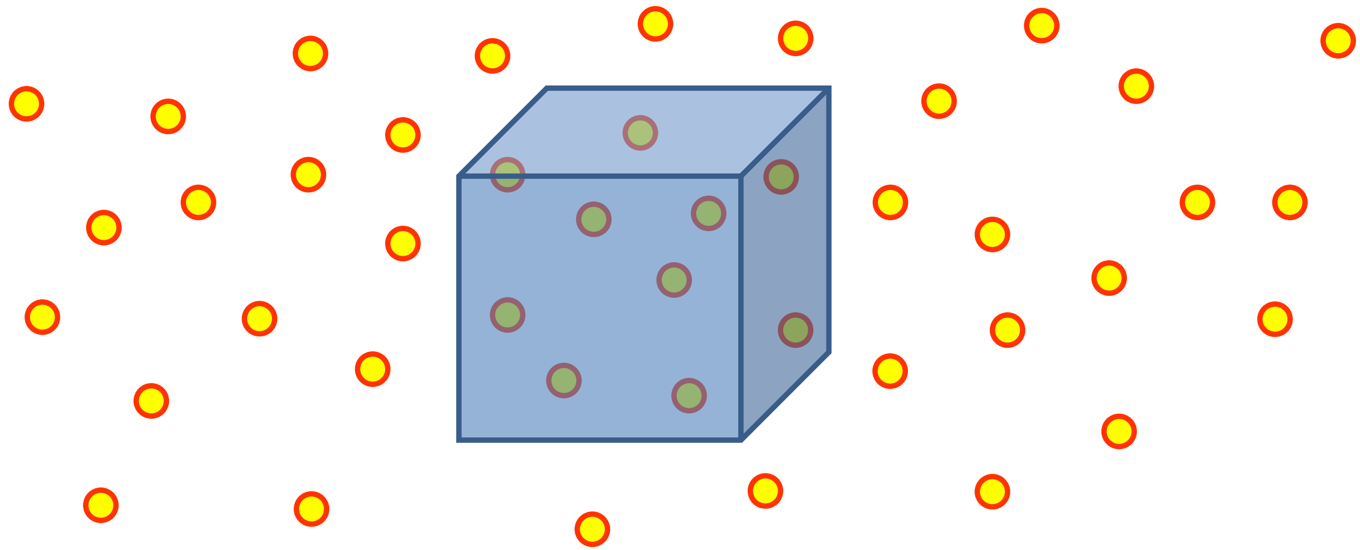
しかし，教科書を読み進むと

正準交換関係$[q_j, p_k] = i\hbar\delta_{jk}$が出て来る頃になると，「光は相対論的対象であり，光子は質量ゼロであり，非相対論的量子論では扱えない」とか何とか言い出して（あるいは何の断りもなしに），光子の位置と運動量の話は鳴りを潜めてしまう．あるいは偏光状態だけに注目して話が進められる．

また，こういうハミルトニアンは光子に対してはNGとされる：　$H = \frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2 + V(x, y, z)$

光子の位置という概念はダメなの？

あるいは,
「光子数密度＝単位体積あたりの光子数」
という概念は ill-defined なのか？



光子の位置問題の歴史 1

Pauli (1933) 光子のエネルギー運動量密度はwell-definedだが，保存カレントとしての光子数密度は local observable としては定義できないことを指摘.

エネルギー密度 $\varepsilon = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2)$ は OK.

数密度を $n = \dfrac{\varepsilon}{\hbar\omega}$ で定義すればいいじゃないかと思うかもしれないが，周波数ωは局所物理量ではない.

光子数密度が場の理論的にうまく定義できないことの荒っぽい説明

spin 0 : スカラー場 ϕ

電荷カレント（1階微分）　$J_\mu = -i(\phi^\dagger \partial_\mu \phi - \phi \partial_\mu \phi^\dagger)$

エネルギーカレント（2階微分）

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial_\nu \phi + \partial_\nu \phi^\dagger \partial_\mu \phi - g_{\mu\nu}(\partial_\kappa \phi^\dagger \partial^\kappa \phi - m^2 \phi^\dagger \phi)$$

spin ½ : スピノル場 ψ

電荷カレント（0階微分）　$J_\mu = \bar{\psi}\, \gamma_\mu \psi$

エネルギーカレント（1階微分）

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \bar{\psi}\, i(\gamma_\mu \partial_\nu + \gamma_\nu \partial_\mu)\psi - g_{\mu\nu}(\bar{\psi}\, i\gamma^\kappa \partial_\kappa \psi - m\bar{\psi}\psi)$$

ゲージ変換 $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \lambda$

spin 1 : ベクトル場 A_μ とテンソル場 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

電荷カレント（–1階微分）$J_\mu = A^\kappa F_{\kappa\mu}$? これはゲージ不変量ではない

エネルギーカレント（0階微分）　$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} F_\mu{}^\kappa F_{\nu\kappa} + \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\kappa\sigma} F^{\kappa\sigma}$

光子の位置問題の歴史 2

Pryce (1948) 光子の位置演算子を非可換にすればMaxwell方程式と矛盾しない.

$$[p_j, p_k] = 0$$

$$[x_j, p_k] = i\hbar\delta_{jk}$$

$$[x_j, x_k] = i\hbar^2 \frac{\varepsilon_{jkl}\, p_l}{\|\boldsymbol{p}\|^3}$$

とくに, $$[x, y] = i\hbar^2 \frac{p_z}{\|\boldsymbol{p}\|^3}$$

Pryceの非可換位置演算子の解釈

モノポール磁場中の荷電粒子の量子力学から位置と運動量の役割を入れ替えたものと解釈できる:

$$
\begin{aligned}
\left[p_x - eA_x, p_y - eA_y\right] &= i\hbar e\left(\partial_x A_y - \partial_y A_x\right) \\
&= i\hbar e B_z \\
&= i\hbar e \frac{g}{\|\boldsymbol{r}\|^2} \frac{z}{\|\boldsymbol{r}\|} \\
&= i\hbar^2 \frac{n}{2} \frac{z}{\|\boldsymbol{r}\|^3}
\end{aligned}
$$

光子の位置問題の歴史 3

Newton-Wigner (1949), Wightman (1962)
4次元Poincaré群のユニタリ既約表現の中に
3次元Euclid群のimprimitivity systemの表現はできるか？という問題の立て方をした.

質量$m \neq 0$の表現の場合は「できる」.
質量$m = 0$, スピン$j \geq \frac{1}{2}$の表現の場合は「できない」ことを証明した. 光子はスピン1なので「光子の位置の分布密度」のようなものは定義できない.

Wightmanの問題設定

4次元Poincaré群

$SO(3,1)^{\uparrow} \rtimes \mathbb{R}^4$

←これの既約ユニタリ表現は質量とスピンで
　特徴づけられ，相対論的素粒子を記述する.

←こちらの既約ユニタリ表現から
　↓こちらの表現を誘導できるか？

3次元Euclid群のimprimitivity system

$(SO(3) \rtimes \mathbb{R}^3) * \mathcal{L}^{\infty}(\mathbb{R}^3)$

部分群

部分代数

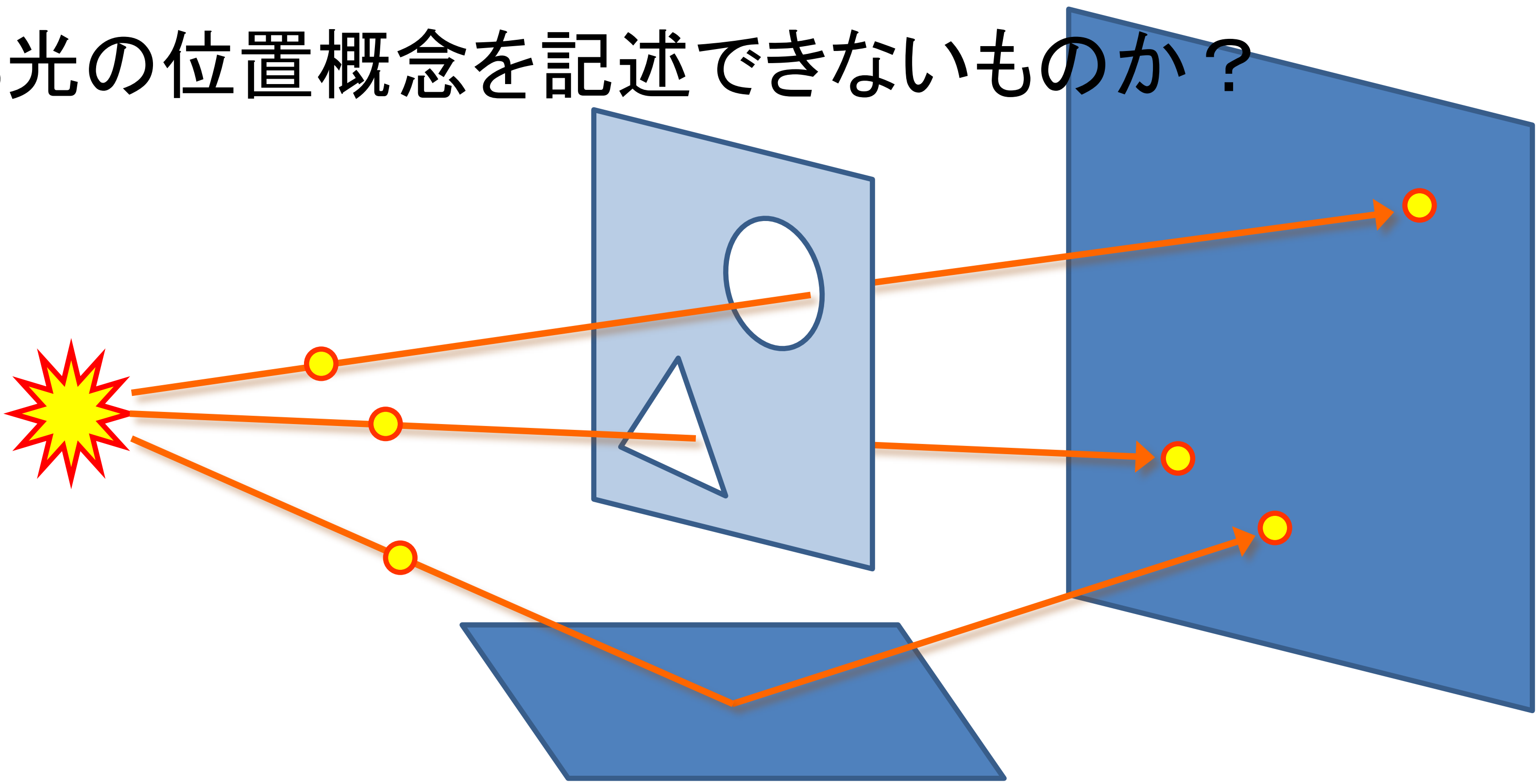
3次元Euclid群

$SO(3) \rtimes \mathbb{R}^3$

質量$m = 0$, スピン $j \geq \frac{1}{2}$の既約表現
に対しては，この持ち上げができない.

しかし，日常経験･直観では，光には位置という属性があるように見える．

光の発射点･通過点･到着点，光線の反射･屈折といった幾何的概念は現実に機能している．理論でも光の位置概念を記述できないものか？



「粒子の位置」の通常の記述方法

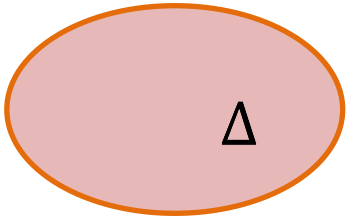
位置演算子のスペクトル分解

$$\hat{x} = \int x\,|x\rangle\langle x|dx,\ \ \hat{y} = \int y\,|y\rangle\langle y|dy,\ \ \hat{z} = \int z\,|z\rangle\langle z|dz$$

位置の射影演算子

$$\hat{P}(\Delta) = \iiint_{\Delta} |x\rangle\langle x|\otimes|y\rangle\langle y|\otimes|z\rangle\langle z|dxdydz$$

$\hat{P}(\Delta)$は粒子が領域Δ内にあれば値1, なければ値0



「粒子の位置」の射影測定: Mackey's imprimitivity system

1. 可測集合 $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ ごとに射影演算子 $P(\Delta)$ があり,
2. $P(\emptyset) = 0,\ P(\mathbb{R}^3) = 1$
3. $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset \ \Rightarrow P(\Delta_1 \cup \Delta_2) = P(\Delta_1) + P(\Delta_2)$
4. $P(\Delta_1 \cap \Delta_2) = P(\Delta_1)P(\Delta_2) = P(\Delta_2)P(\Delta_1)$
5. 平行移動・回転 $g \in SO(3) \rtimes \mathbb{R}^3$ ごとにユニタリ演算子 $U(g)$ があり,
6. $U(g)^\dagger P(\Delta) U(g) = P(g\Delta)$
7. $U(g_1)U(g_2) = U(g_1 g_2)$ は要請しない(ユニタリ射影表現を許容する)

「光子の位置」の記述方法の試案

Generalized localizability, Weak localizability

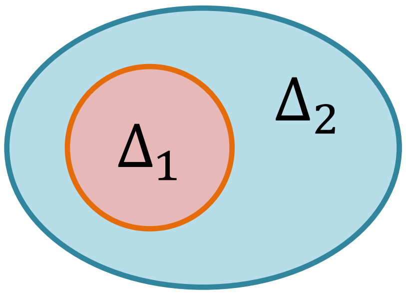
Jauch-Piron (1967), Amrein (1969)

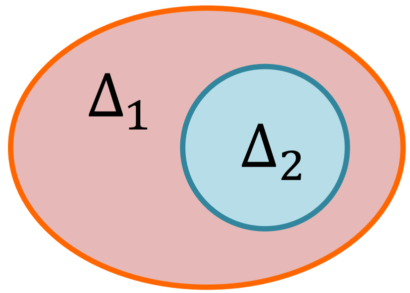
1. 可測集合 $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ ごとに射影演算子 $F(\Delta)$ があり,
2. $F(\emptyset) = 0,\ F(\mathbb{R}^3) = 1$
3. $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset \ \Rightarrow\ F(\Delta_1) \perp F(\Delta_2)$
4. $F(\Delta_1 \cap \Delta_2) = F(\Delta_1) \cap F(\Delta_2)$
5. 平行移動・回転 $g \in SO(3) \rtimes \mathbb{R}^3$ ごとにユニタリ演算子 $U(g)$ があり,
6. $U(g)^\dagger F(\Delta) U(g) = F(g\Delta)$

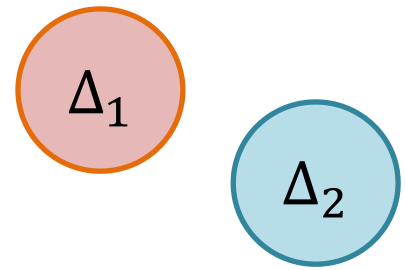
Jauch-Piron-Amreinのアイディア

Noncommutative localizability

$\Delta_1 \subset \Delta_2$ または $\Delta_1 \supset \Delta_2$ または $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$ のとき,

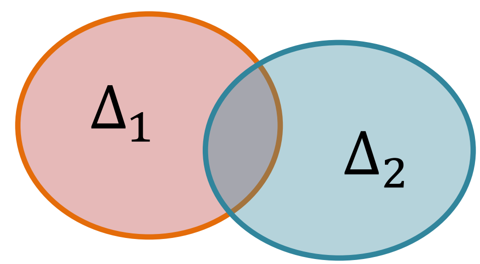






$$F(\Delta_1)F(\Delta_2) = F(\Delta_2)F(\Delta_1) = F(\Delta_1 \cap \Delta_2)$$

が成り立つ.

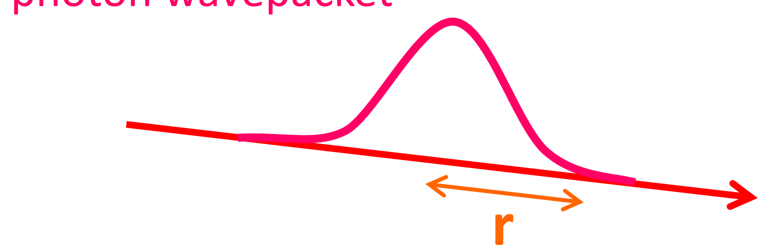


一般には $F(\Delta_1)F(\Delta_2) \neq F(\Delta_2)F(\Delta_1)$

しかし, 実験で確かめられたわけではない.

別のアプローチ：古典場の「局在光子」

自由場のMaxwell方程式について，エネルギー密度がなるべく狭い範囲に局在している解を探す.



energy density $\varepsilon(r) \sim \frac{1}{r^{\alpha}}$

Pike, Sarkar (1987)：Newton-Wigner関数は$\alpha = 7$.

Hellwarth, Nouchi (1996)：$\alpha = 10$の解を見つけた.

Adlard, Pike, Sarkar (1997)：任意のベキの解を見つけた.

しかし，「光子の局在」という概念を適切に表しているか？

そもそも我々は光の何を見ているのか？

- 電場 $\boldsymbol{E}$？
- 磁場 $\boldsymbol{B}$？
- 電磁場のエネルギー $\varepsilon = \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{B}^2)$？
- ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$（の横波成分）？
- 光子の生成･消滅演算子？

我々は主に電場を見ている

Otto Wiener (1890) :
写真が感光しているのは電磁波の磁場 $\boldsymbol{B}$ ではなく, 電場 $\boldsymbol{E}$ であることを実証.

光化学反応に主に寄与しているのは, 分子の電気モーメントと電場の相互作用.

Otto Wienerの実験

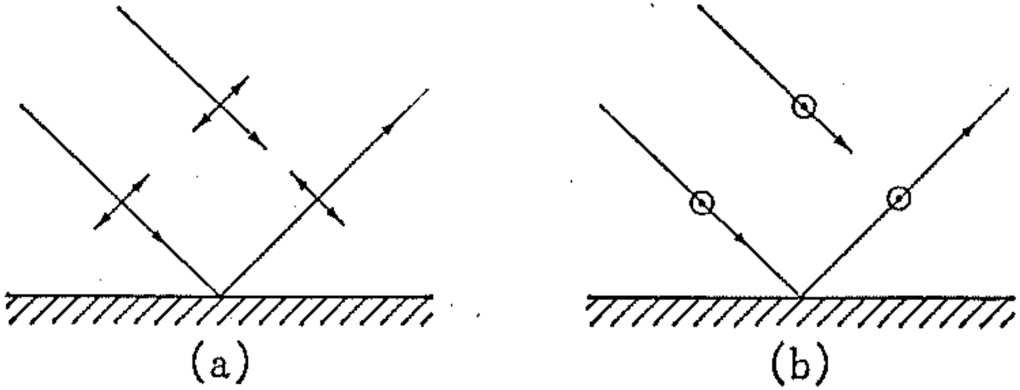


図 5·4　入射光と反射光の干渉（$\boldsymbol{E}$ベクトルが入射面に平行（a）と垂直（b）の場合）

P偏光　　S偏光

偏光を45度入射して，入射光と反射光の干渉を起こす．
(a) 磁場の定在波，
(b) 電場の定在波ができる．

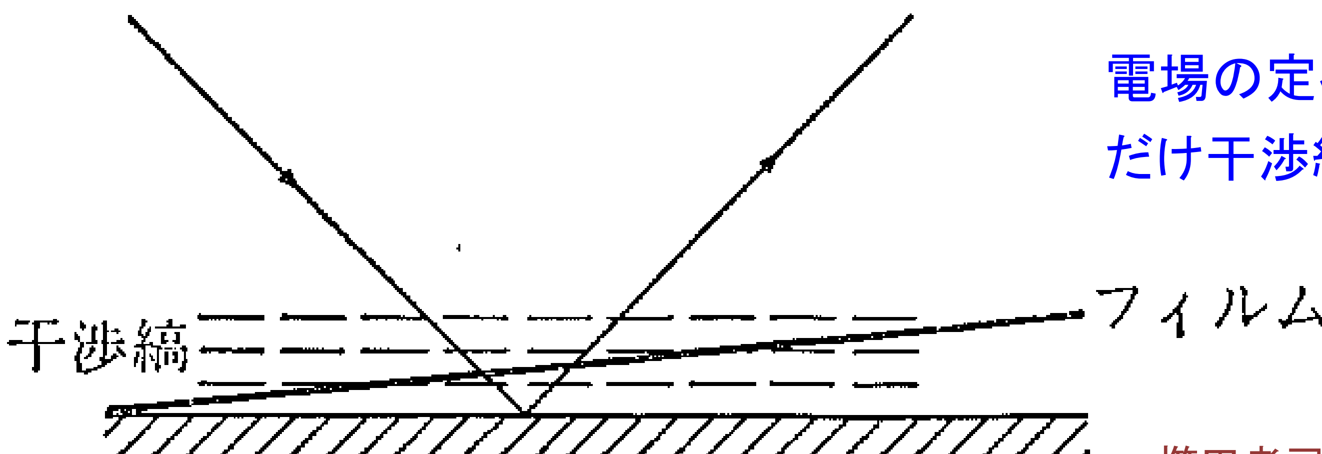


図 5·5　ウィーナーの実験

電場の定在波ができる(b)だけ干渉縞が撮影される．

櫛田孝司「光物理学」(共立出版)

我々は光の電場を見ている

電子には電荷があるが磁荷はないので，電磁場と電子の間のエネルギーのやりとりは，電場の作用を通して行われる：

$$\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E} + e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$$

$$\frac{dW}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = (e\boldsymbol{E} + \underbrace{e\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{v}}_{\text{磁場は電荷に仕事をしない}}$$

$$= e\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v} + 0$$

「光子の生成吸収位置」の理論記述

原則として，光子は吸収というプロセスによってのみ，観測される.

ゲージ相互作用がそうなっている.

光子の生成・消滅演算子　　　　　　　　　　　測定系の保存電荷・電流

$$S_{int} = \int A_\mu J^\mu d^4x$$

「飛んでいる光子の位置」は直接測れないなら，定義する必要はなく，「光子と測定器が相互作用した位置」が定義・記述できればよかろう.

ゲージ不変なゲージ相互作用

光子のゲージ場

測定系の保存電荷・電流

$$\int A_\mu J^\mu \, d^4x$$

$$\partial_\mu J^\mu = 0$$

ゲージ変換: $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$

$$\int A_\mu J^\mu \, d^4x \rightarrow \int \left(A_\mu + \partial_\mu \lambda\right) J^\mu \, d^4x$$

$$= \int A_\mu J^\mu \, d^4x - \int \lambda \, \partial_\mu J^\mu \, d^4x$$

$$= \int A_\mu J^\mu \, d^4x - 0$$

光子と検出器のゲージ相互作用

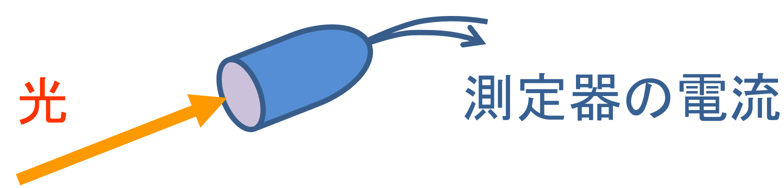
$$e^{-\frac{i}{\hbar}\int H dt}\,|photon\rangle\otimes|detector\rangle = |vac\rangle\otimes|click@detector\rangle$$

光と測定器のゲージ相互作用を含む
ハミルトニアン

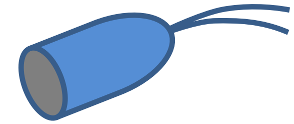
$$H = H_{photon} + H_{detector} + H_{int}$$

$$\int H_{int}\, dt = \int A_{\mu}\, J^{\mu}\, d^4x$$

光子のゲージ場　　測定系の電流



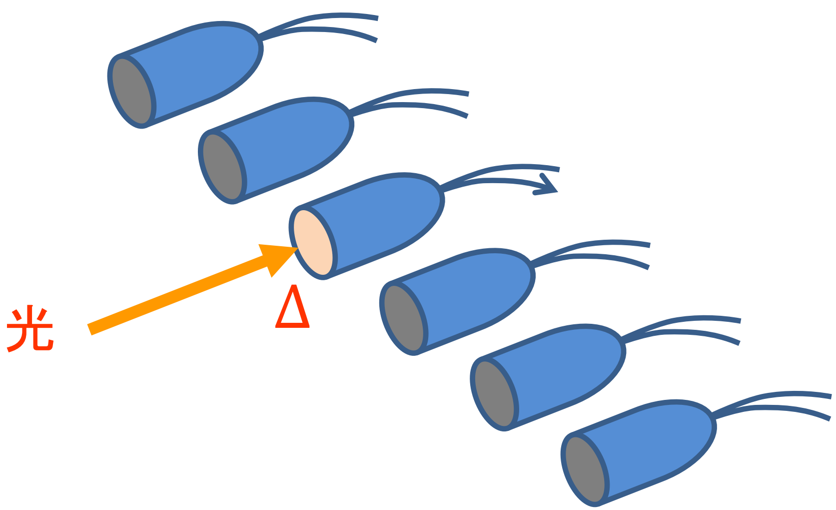
ゲージ相互作用からPOVMへ



$\Pi(\Delta)$ 検出確率を記述する POVM (probability operator-valued measure)

$$\langle photon|\Pi(\Delta)|photon\rangle =$$

$$\langle photon|\otimes\langle detctors|U^{\dagger}\big(1\otimes P(\Delta)\big)U|photon\rangle\otimes|detectors\rangle$$



$$U = e^{-\frac{i}{\hbar}\int H dt}$$

$$\int H_{int}\, dt = \int A_{\mu}\, J^{\mu}\, d^4x$$

$$P(\Delta) = |click@\Delta\rangle\langle click@\Delta|$$

点電荷群が作る光子検出器のPOVM

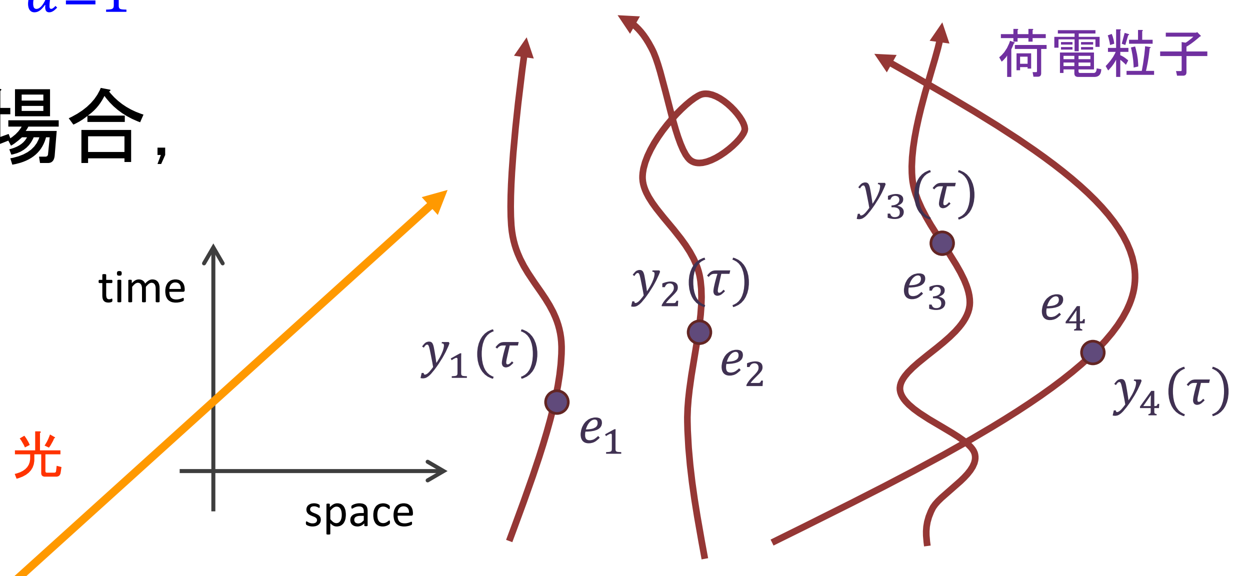
電流が

Aharonov の weak value に相当

$$\langle click@\Delta |\, J^{\mu}(x) |detector\rangle$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{n} e_{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d{y_{\alpha}}^{\mu}(\tau)}{d\tau} \delta^{4}\big(x - y_{\alpha}(\tau)\big) d\tau$$

となっている場合，



点電荷対が作る光子検出器のPOVM

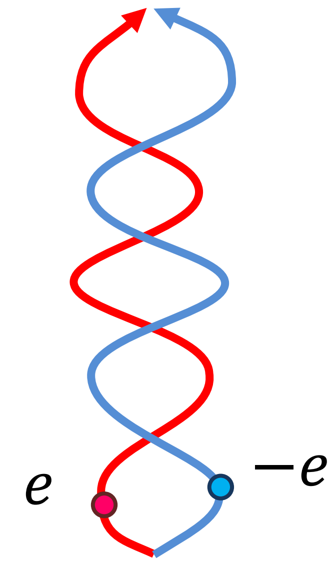
とくに電気双極子 $e_1 = -e_2 = e$ の場合，

$$\int A_\mu(x) \langle click@\Delta | J^\mu(x) | detector \rangle d^4x$$

$$= \sum_{\alpha=1,2} e_\alpha \int A_\mu(y_\alpha(\tau)) \frac{d{y_\alpha}^\mu(\tau)}{d\tau} d\tau$$

$$= e \int_{C_1} A_\mu dy^\mu - e \int_{C_2} A_\mu dy^\mu \quad = e \oint_{C_1 - C_2} A_\mu dy^\mu$$

$$= e \int_S F_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \; = e \int_S F_{k0} dx^k dx^0 = \int \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{p} dt$$



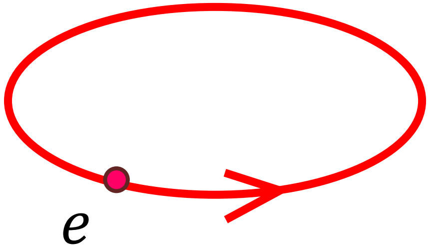
電場・双極子結合

環電流が作る光子検出器のPOVM

荷電粒子が単位時間あたりn回転運動している場合,

$$\int A_\mu(x)\langle click@\Delta|J^\mu(x)|detector\rangle d^4x$$

$$= en\int dt\int A_\mu(y(\tau))\frac{dy^\mu(\tau)}{d\tau}d\tau$$

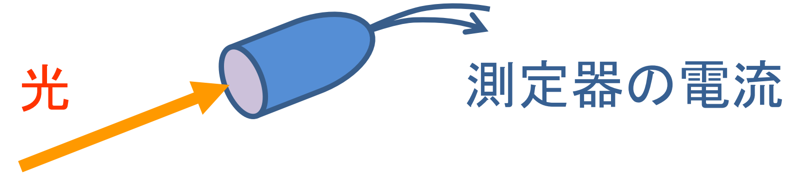


$$= en\int dt\int_C A_\mu dy^\mu$$

$$= en\int dt\int_S F_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = en\int dt\int_S F_{ij}dx^i dx^j = \int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{M}dt$$

磁場・磁気モーメント結合

結論



- 光子と測定器のゲージ相互作用から光子の位置の検出確率を記述するPOVM $\Pi(\Delta)$ が構成できた.

$$\langle photon|\Pi(\Delta)|photon\rangle$$

$$= \langle photon|\otimes\langle detctors|U^{\dagger}\big(1\otimes P(\Delta)\big)U|photon\rangle\otimes|detectors\rangle$$

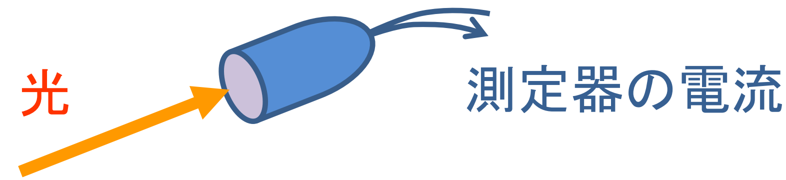
$$P(\Delta) = |click@\Delta\rangle\langle click@\Delta|$$

$$U = e^{-\frac{i}{\hbar}\int Hdt}$$

$$\int H_{int}\, dt = \int A_{\mu}\, J^{\mu}\, d^4x$$

- このPOVMは光子の実測の状況を忠実に記述している. とくに電場・電気双極子結合を正しく捉えている.

課題



- この理論では光子の位置の測定分解能は，測定器側の電流の行列要素の空間・時間広がりで決まる：

$$\int A_\mu(x)\langle click@\Delta|\, J^\mu(x)|detector\rangle d^4x$$

- 分解能に関して不確定性関係のような普遍的な関係式があるか？（たぶんある）
- 真空中を飛んでいる光子の位置を定めることができるか？
- 量子非破壊測定（光子を吸収せずに光子数を計測する）における光子数密度は定義できるか？
- キャビティ中の光子の位置？
- 光子が発射点から到着点まで光速で移動することを記述しているか？

おわり

http://www.pref.mie.lg.jp/SUISAN/HP/syun_no_sakana/summer_bonito.htm