テンソル値微分形式による電磁気の２乗量の再解釈
ー 電磁界曼荼羅の完成を目指して

北野 正雄

京都大学

2020 年 1 月 11–12 日

第 9 回 QUATUO 研究会
崇城大学 熊本メインキャンパス

はじめに

- 微分形式による電磁気
  - 電磁気の方程式群の系統的整理に有用
  - ミンコフスキー空間への自然な拡張 (4 元微分形式)
- エネルギーや運動量などの 2 乗量がうまく扱えない (ように思える)
- ファラデー・マクスウェルが追求した電磁場のイメージを復活させたい

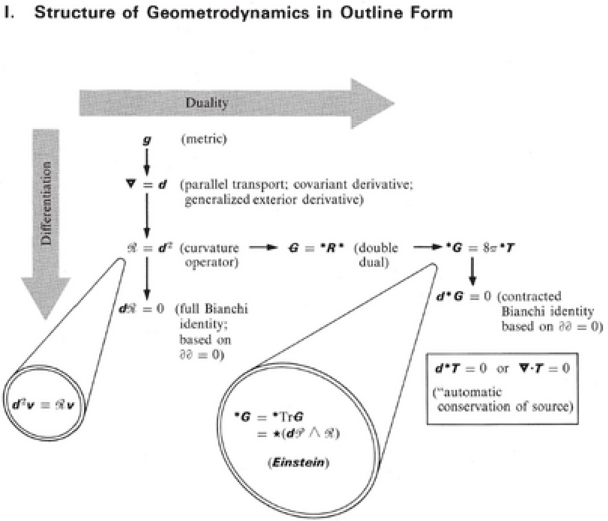
電磁気諸量の関係

	F(力) 系列		S(源) 系列	
	$(\phi, c_0\boldsymbol{A})$			
$-\boldsymbol{\nabla}\phi - \partial_t\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}$ $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$	$\downarrow \mathrm{d}$	$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E}$		
	$(\boldsymbol{E}, c_0\boldsymbol{B})_2$	$\leftarrow * \rightarrow$	$(c_0\boldsymbol{D}, \boldsymbol{H})_2$	
$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} + \partial_t\boldsymbol{B} = 0$ $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0$	$\downarrow \mathrm{d}$	$\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{H}$	$\mathrm{d}\downarrow$	$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H} - \partial_t\boldsymbol{D}$ $\varrho = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D}$
	0		$(c_0\varrho, \boldsymbol{J})_3$	
			$\mathrm{d}\downarrow$	$0 = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J} + \partial_t\varrho$
			0	

電磁気界曼荼羅 2018.12.15 に修正 （まだ未完成）

$$
\begin{tikzcd}
0 & \mathit{\Lambda}\ \text{(gauge)} \arrow[d, "(\mathrm{d})"'] & & & \\
1 & \boldsymbol{V}\ \text{(potential)} \arrow[d, "\mathrm{d}"'] & & & \\
2 & F\ \text{(f-field)} \arrow[r, leftrightarrow, "Z_0 *"] \arrow[d, "\mathrm{d}"'] & G\ \text{(s-field)} \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{d}"] & F \otimes G \arrow[d] & \\
3 & 0 & \mathcal{J}\ \text{(current)} \arrow[d, "\mathrm{d}"] & ?? \arrow[r, leftrightarrow, "c_0^{-1}"] & ? \arrow[d, "\mathrm{d}"'] \\
4 & & 0 & & \overleftarrow{\mathfrak{f}}\ \text{(force)}
\end{tikzcd}
$$

Gravitation から



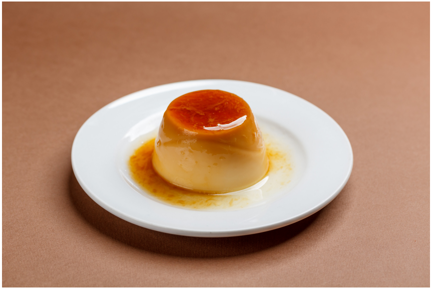
Misner *et al.*: Gravitation p. 371.

現在の電磁気における力の位置づけ

- 通常の考え方
  - 試験電荷にかかる力を用いて電場 $\boldsymbol{E}$, 磁場 $\boldsymbol{B}$ を定義する
  - 電場・磁場のダイナミクスをマクスウェル方程式で記述
  - 与えられたソースや境界条件の下で方程式の解を求める
  - 必要があれば, ローレンツ力の式から力を求める
- 問題点
  - 「力」が後退している (課程の進行に伴って)
  - 近接作用であることがイメージしにくい
  - 矢印で表されるベクトル場では空間の緊張が捉えられない
- 距離感覚
  - クーロン/ビオ・サバールの法則 — 遠隔作用
  - ローレンツの式 — 半遠隔作用
  - マクスウェルの応力 — 近接作用

連続体のイメージ

- 豆腐やプリンのような弾性体のブロック



- 1 次元連続体としてのバネ
  - デモ実験
  - 各点での歪, 応力, 力密度（長さあたり）
- 真空は電磁力を伝える連続体

  — このイメージはエーテルとともに排除

ばね

重力下に置かれた自重をもつ「ばね」

- ばねの「のび (歪)」$s(z)$ は, ばねの波長 $\lambda(z)$ で可視化：

$$\lambda(z) = (1 + s(z))\lambda_0, \quad \lambda_0 : \text{自然長における波長}$$

- ばね定数を k とすると $\sigma(z) := k\lambda_0 s(z) \overset{\mathrm{SI}}{\sim} \mathrm{N}$ は応力 (引張りが正)
- 微小区間 Δz に対するつりあいの式

$$\sigma(z + \Delta z) - \sigma(z) = g\frac{\rho\Delta z}{1 + s(z)}, \quad \text{i.e.} \quad \lambda_0\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}z}(z) = \frac{\rho g/k}{1 + s(z)}$$

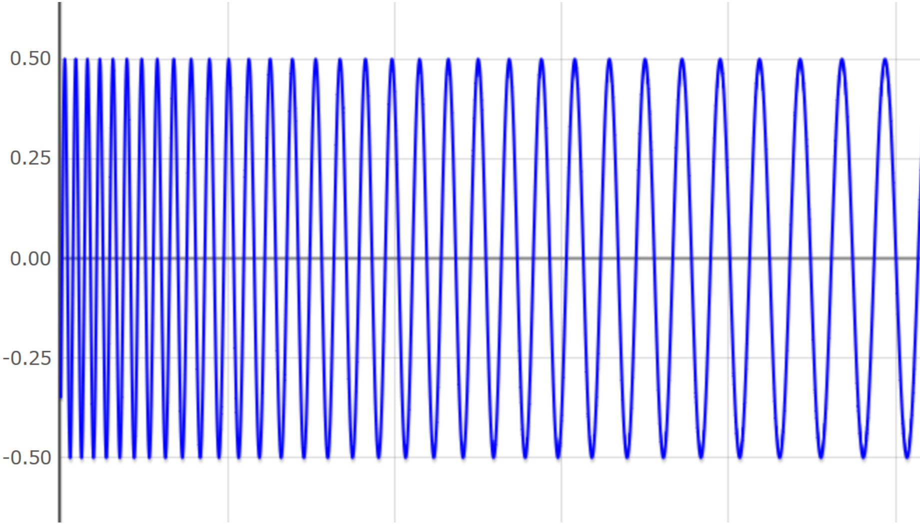
ρ: 自然長の場合の質量密度, g: 重力加速度

- 変数分離で解ける. 境界条件: $s(0) = 0$ (下端)

$$s(z) = -1 + \sqrt{1 + 4(g\rho/k)(z/\lambda_0)}$$

ばね

$g \longleftarrow$



$0 \quad \to z$

応力テンソル (単なる 2 階テンソルではない！)

- 両面性：境界の面 S は領域 V, V' の表面と考えることができる

$$S = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}, \qquad S' = \boldsymbol{a}' \wedge \boldsymbol{b}' \quad (= -S)$$

- 領域 V, V' に, はたらく力は “コベクトル値 2 形式” $\overleftarrow{T}$ を用いて

$$\overleftarrow{f} = \tfrac{1}{2}\overleftarrow{T} \,|\, S, \qquad \overleftarrow{f}' = \tfrac{1}{2}\overleftarrow{T} \,|\, S' \quad (= -\overleftarrow{f})$$

- $\overleftarrow{T}$ の成分表示

$$f_n = T_{n,ij}\, a_i b_j$$

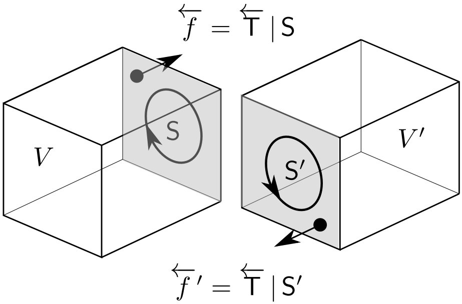
- 添字　i, j について反対称. ここについてホッジ双対をとると

$$T_{n,ij} = \epsilon_{ijk}(T*)_{n,k} \quad \rightarrow \quad T_{nk} := (T*)_{n,k} \quad \text{:通常の応力テンソル}$$

T_{nk} における添字 n, k は異なった役割

応力テンソルの２面性

- １つの量 $\overleftarrow{T}$ から, V に働く力と V' に働く力が得られる



電磁気学の定式化（復習モード）

- 多元量の扱い
  1. ベクトル・スカラー
  2. テンソル
  3. 微分形式（反対称共変テンソル）
  4. その他 (4 元数, Geometric Algebra, ...)

  1. は単純化しすぎ (成分の数だけで分類); 2. は一般的すぎる; 3. は幾何学を反映していて分かりやすい; 4. は一般性に欠ける.
- 独立変数の選択
  1. ポテンシャル派: ϕ, $\boldsymbol{A}$
  2. 2 場（力場）重視: $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$
  3. 4 場均等: $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$

  1., 2. はガウス単位系の影響; 3. が望ましい. 相対論では F, G に統合.

微分形式 — 反対称 (共変) テンソル

- 1 形式 (1 階テンソル) は E_3 から実数 $\mathbb{R}$ への線形変換. E_3 は 3 次元ユークリッド空間.
- 電場 $\boldsymbol{E}$ は $\mathrm{d}\boldsymbol{x} \in E_3$ と電位 $\phi \in \mathbb{R}$ を線形的に関係づけている.

$$\phi = \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{E} \cdot (\alpha \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \beta \mathrm{d}\boldsymbol{y}) = \alpha(\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{x}) + \beta(\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{y})$$

- テンソルは添字付記号のことではない. そう見えるのは成分表示 $\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \sum_i \mathrm{d}x^i \boldsymbol{e}_i$ の結果.

$$\phi = \boldsymbol{E} \cdot \left(\sum_i \mathrm{d}x^i \boldsymbol{e}_i \right) = \sum_i (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{e}_i) \mathrm{d}x^i = \sum_i E_i \mathrm{d}x^i$$

- 双対基底 $(\boldsymbol{e}^j)$, $\boldsymbol{e}^j \cdot \boldsymbol{e}_i = \delta_i^j$ を用いて展開できる.

$$\boldsymbol{E} = \sum_j E_j \boldsymbol{e}^j \quad \in {E_3}^* (\text{双対空間})$$

- ユークリッド基底では上添字、下添字に区別は無用.

2 形式

- 2 形式 (2 階反対称テンソル) は $E_3{}^2$ から実数 $\mathbb{R}$ への双線形変換.
- 磁束密度 B は $\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \mathrm{d}\boldsymbol{y} \in E_3$ と磁束 $\varphi \in \mathbb{R}$ を線形的に関係づけている.

$$\Phi = B : \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{B} \cdot (\mathrm{d}\boldsymbol{x} \times \mathrm{d}\boldsymbol{y}), \quad \mathrm{d}\boldsymbol{x},\ \mathrm{d}\boldsymbol{y}\ \text{について線形}$$

- 反線形

$$B : \mathrm{d}\boldsymbol{y}\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -B : \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y} \quad \text{または,} \quad B : \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{x} = 0$$

- 成分表示

$$B : \left(\sum_i \mathrm{d}x^i \boldsymbol{e}_i\right)\left(\sum_j \mathrm{d}y^j \boldsymbol{e}_j\right) = \sum_{i,j} (B : \boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j) \mathrm{d}x^i \mathrm{d}y^j = \sum_{i,j} B_{ij} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}y^j$$

- 双対基底 $(\boldsymbol{e}^j)$ を用いて展開できる.

$$B = \sum_{i,j} B_{ij} \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}^j = \sum_{i>j} B_{ij} \boldsymbol{e}^i \wedge \boldsymbol{e}^j, \quad \boldsymbol{e}^i \wedge \boldsymbol{e}^j := \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}^j - \boldsymbol{e}^j \boldsymbol{e}^i$$

3 形式

- 3 形式 (3 階反対称テンソル) は ${E_3}^3$ から実数 $\mathbb{R}$ への 3 重線形変換.
- 電荷密度 $\mathcal{R}$ は $\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \mathrm{d}\boldsymbol{y}, \mathrm{d}\boldsymbol{z} \in E_3$ と電荷 $Q \in \mathbb{R}$ を線形的に関係づけている.

$$Q = \mathcal{R} : \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y}\mathrm{d}\boldsymbol{z} = \rho(\mathrm{d}\boldsymbol{x} \times \mathrm{d}\boldsymbol{y}) \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{z}, \quad \mathrm{d}\boldsymbol{x},\ \mathrm{d}\boldsymbol{y},\ \mathrm{d}\boldsymbol{z} \text{ について線形}$$

- 反線形

$$\mathcal{R} : \mathrm{d}\boldsymbol{y}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{z} = -\mathcal{R} : \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{y}\mathrm{d}\boldsymbol{z}, \ldots \quad \text{または}, \quad \mathcal{R} : \mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}\boldsymbol{z} = 0, \ldots$$

- 成分表示

$$Q = \mathcal{R} : \left(\sum_i \mathrm{d}x^i \boldsymbol{e}_i\right)\left(\sum_j \mathrm{d}y^j \boldsymbol{e}_j\right)\left(\sum_k \mathrm{d}y^k \boldsymbol{e}_k\right) = \sum_{ijk} R_{ijk} \mathrm{d}x^i \mathrm{d}y^j \mathrm{d}z^k$$

- 双対基底 $(\boldsymbol{e}^j)$ を用いて展開できる.

$$\mathcal{R} = \sum_{i,j,k} R_{ijk} \boldsymbol{e}^i \boldsymbol{e}^j \boldsymbol{e}^k = R_{123} \boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^2 \wedge \boldsymbol{e}^3, \quad \boldsymbol{e}^i \wedge \boldsymbol{e}^j \wedge \boldsymbol{e}^k := \boldsymbol{e}^{[i} \boldsymbol{e}^j \boldsymbol{e}^{k]}$$

場の階数による分類と電磁方程式

階数	ポテンシャル	力場	源場	源
0	ϕ			
1	$\boldsymbol{A}$	$\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{H}$	
2		B	D	J
3				$\mathcal{R}$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\phi + \partial_t \boldsymbol{A} &= -\boldsymbol{E} \\
\mathrm{d}\boldsymbol{A} &= B
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\boldsymbol{H} - \partial_t D &= J \\
\mathrm{d}D &= \mathcal{R}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \mathrm{d}\boldsymbol{E} + \partial_t B \\
0 &= \mathrm{d}B
\end{aligned}
$$

$$
\mathrm{d}J + \partial_t \mathcal{R} = 0
$$

真空の構成方程式

- $\boldsymbol{E}$ と D, B と $\boldsymbol{H}$ の関係は, ホッジの星型演算子 $*$ を用いて

$$\boldsymbol{E} = \varepsilon_0^{-1}(*\mathsf{D}) \quad \text{成分では} \quad E_i = \varepsilon_0^{-1}\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}D_{jk}$$

$$\mathsf{B} = \mu_0(*\boldsymbol{H}) \quad \text{成分では} \quad B_{ij} = \mu_0\epsilon_{ijk}H_k$$

ここで,

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i,j,k: \text{サイクリック}) \\ -1 & (\text{反サイクリック}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

- 構成方程式は単なる比例関係ではない.
- n 階のテンソルのパリティは $(-1)^n$ である. これに従わないものは擬テンソルと呼ばれる. ϵ_{ijk}, D, $\boldsymbol{H}$ はいずれも擬テンソル. すなわち, $\boldsymbol{E}$, D は奇, B, $\boldsymbol{H}$ は偶である.

電磁方程式の4元化

- 基底 $(\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$, 双対基底 $(\boldsymbol{e}^0, \boldsymbol{e}^1, \boldsymbol{e}^2, \boldsymbol{e}^3)$

$$\text{縮約：}\quad \boldsymbol{e}^\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\beta = \delta^\alpha_\beta,$$
$$\text{内積：}\quad (\boldsymbol{e}_\alpha, \boldsymbol{e}_\beta) = \boldsymbol{g} : \boldsymbol{e}_\alpha \boldsymbol{e}_\beta = g_{\alpha\beta} = \mathsf{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

- 4元ベクトル $\boldsymbol{x} = (c_0 t)\boldsymbol{e}_0 + x^i \boldsymbol{e}_i = x^\alpha \boldsymbol{e}_\alpha$
- ポテンシャル

$$\boldsymbol{V} = \phi \boldsymbol{e}^0 - c_0 \boldsymbol{A}$$

- F場テンソル, S場テンソル

$$\mathsf{F} = \boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{e}^0 + c_0 \mathsf{B}, \quad \mathsf{G} = -\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{e}^0 + c_0 \mathsf{D}$$

- 電荷・電流密度テンソル

$$\mathcal{J} = \mathsf{J} \wedge \boldsymbol{e}^0 + c_0 \mathcal{R}$$

電磁方程式の 4 元化 (2)

- 微分方程式 $(\mathrm{dd}=0)$

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{d}V &= \mathsf{F} & & \\
\mathrm{d}\mathsf{F} &= 0 & & \\
& & \mathrm{d}\mathsf{G} &= \mathcal{R} \\
& & \mathrm{d}\mathcal{R} &= 0
\end{aligned}
$$

- 構成方程式 $(** = -1,\ Y_0 = 1/Z_0)$

$$
\mathsf{F} = Z_0 * \mathsf{G}, \quad \mathsf{G} = -Y_0 * \mathsf{F}
$$

(共変) テンソル値微分形式

- q 階 (共変) テンソルを係数にもつ p 形式

$$\bigotimes^q V^* \otimes \bigwedge^p V^*$$

- 成分と基底を用いると

$$T_{j_1\ldots j_q\,|i_1\ldots i_p|}(\boldsymbol{e}^{j_1}\otimes\cdots\otimes\boldsymbol{e}^{j_q})\otimes(\boldsymbol{e}^{i_1}\wedge\cdots\wedge\boldsymbol{e}^{i_p})$$
$$i_1<\ldots<i_p,\quad p\le n$$

- (q,p) 形式とよぶ. $(0,p)$ 形式は p 形式, $(q,0)$ 形式は q 階の共変テンソル.

テンソル値微分形式のための記法

- test
- 微分形式の階数 $n = 0, \ldots, 4$ を字体で区別

n 形式	字体名	例
0	`mathit`	$\mathit{ABCDEF} \quad \mathit{abcdef}$
1	`mathbf`	$\boldsymbol{ABCDEF} \quad \boldsymbol{abcdef}$
2	`mathsfit`	$\mathsfit{ABCDEF} \quad \mathsfit{abcdef}$
3	`mathscr`	$\mathscr{ABCDEF} \quad \mathscr{abcdef}$
4	`mathfrak`	$\mathfrak{ABCDEF} \quad \mathfrak{abcdef}$

- 成分はすべて通常のイタリック体 (スカラーと同じ). 添字は 3 元は英文字, 4 元はギリシャ文字.
- テンソルの階数 m は文字の上に矢印をつけて表す. 例えば, $(1,2)$ 形式は $\overleftarrow{\mathsfit{T}}$, $(1,3)$ 形式は $\overleftarrow{\mathscr{T}}$.
- 3 元, 4 元の区別が必要な場合は, 後者にアンダースコアを付加

電力とローレンツ力

- 電磁場 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ 中の速度 $\boldsymbol{v}$ で動く点電荷 q

$$\text{電力} \quad W = q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E} \quad \overset{\text{SI}}{\sim} \mathrm{J/s}$$

$$\text{力} \quad \boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \quad \overset{\text{SI}}{\sim} \mathrm{J/m}$$

これらは 4 元ベクトルとしてまとめられる

$$\underline{\boldsymbol{F}} = -(W/c_0)\boldsymbol{e}^0 + \boldsymbol{F} \quad \overset{\text{SI}}{\sim} \mathrm{J/m}$$

- 電荷分布 ϱ, 電流分布 $\boldsymbol{J}$ に対しては体積あたりの量

$$\text{電力密度} \quad w = \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E} \quad \overset{\text{SI}}{\sim} \mathrm{W/m^3}$$

$$\text{力密度} \quad \boldsymbol{f} = \varrho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} \quad \overset{\text{SI}}{\sim} \mathrm{N/m^3}$$

それぞれスカラー (0 形式), ベクトル (1 形式) であり, 空間密度としての性質 (3 形式) が反映されない

微分形式としての{電力, 力}密度

- 電力密度 (3 形式)

$$w = J \wedge \boldsymbol{E} = w\mathcal{E}, \quad \mathcal{E} = \boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^2 \wedge \boldsymbol{e}^3$$

- 電気力密度は 3 形式の電荷密度 $\mathcal{R} = \varrho\mathcal{E}$ を用いて

$$\mathfrak{f}_{\mathsf{e}} = \mathcal{R} \wedge \boldsymbol{E} \equiv 0 \quad \text{3 元 4 形式はゼロ} \times$$

- 物理的に考えると, 外積ではなくテンソル積が適切

$$\overleftarrow{f}_{\mathsf{e}} = \mathcal{R} \otimes \boldsymbol{E} = (\varrho\boldsymbol{E}) \otimes \mathcal{E} \quad \text{コベクトル値 3 形式}$$

微分形式としての{電力, 力}密度 (2)

- 磁気力密度は, 3 元 2 形式 J, B の積であるが, 外積はゼロ：

$$\mathfrak{f}_{\mathsf{m}} = J \wedge B \equiv 0 \quad \text{3 元 4 形式はゼロ}$$

- テンソル積 $J \otimes B$ を経て, コベクトル値 3 形式に至る方法を考える必要がある：

$$J \otimes B \quad \to \quad \cdots \quad \to \quad \overleftarrow{f}_{\mathsf{m}} = (\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}) \otimes \mathcal{E}$$

- この計算は少しの準備の後に示す．この結果を用いると, ローレンツ力密度は

$$\overleftarrow{f} = \overleftarrow{f}_{\mathsf{e}} + \overleftarrow{f}_{\mathsf{m}} = \boldsymbol{f} \otimes \mathcal{E} = (\varrho \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}) \otimes \mathcal{E}$$

方法 1 (after Hehl and Obukhov)

- 2 形式の一方を 1 形式化してからウエッジ積をとる

$$\boldsymbol{e}^k \left[(J \,|\, \boldsymbol{e}_k) \wedge B \right]$$

- 確認：成分 1 を考える

$$\begin{aligned} J \,|\, \boldsymbol{e}_1 &= (J_{12}\boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^2 + J_{23}\boldsymbol{e}^2 \wedge \boldsymbol{e}^3 + J_{31}\boldsymbol{e}^3 \wedge \boldsymbol{e}^1) \,|\, \boldsymbol{e}_1 \\ &= J_{12}\boldsymbol{e}^2 - J_{31}\boldsymbol{e}^3 \end{aligned}$$

B とウエッジ積をとる

$$\begin{aligned} (J_{12}\boldsymbol{e}^2 - J_{31}\boldsymbol{e}^3) \wedge B &= (J_{12}B_{31} - J_{31}B_{12})\boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^2 \wedge \boldsymbol{e}^3 \\ &= (J_3 B_2 - J_2 B_3)\mathcal{E} = f_1 \mathcal{E} \end{aligned}$$

3 成分を合成して

$$(\boldsymbol{e}^1 f_1 + \boldsymbol{e}^2 f_2 + \boldsymbol{e}^3 f_3) \otimes \mathcal{E} = \boldsymbol{f} \otimes \mathcal{E}$$

方法 2 — 部分反対称化

$$
\begin{aligned}
f_{ijkl} = \tfrac{6!}{2} J_{[ij} B_{k]l} &= \tfrac{1}{2}\delta^{i'j'k'}_{ijk} J_{i'j'} B_{k'l} = \tfrac{1}{2}\delta^{i'j'k'}_{ijk} J_{i'j'} \tfrac{1}{2}\delta^{k''l'}_{k'l} B_{k''l'} \\
&= \frac{1}{4}\epsilon_{ijk}\epsilon^{i'j'k'}\epsilon_{k'lm}\epsilon^{k''l'm} J_{i'j'} B_{k''l'} \\
&= \epsilon_{ijk}\epsilon_{k'lm}(*J)^{k'}(*B)^{m} = -\epsilon_{ijk}(\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})_l
\end{aligned}
$$

4 元化

- 3 元微分形式で表した電力密度と力密度

$$w = w\mathcal{E}, \quad \overleftarrow{f} = \boldsymbol{f} \otimes \mathcal{E}$$

- 4 元微分形式にまとめると

$$\overleftarrow{\mathfrak{f}} = \left(-(w/c_0)\boldsymbol{e}^0 + \boldsymbol{f}\right) \otimes (\boldsymbol{e}^0 \wedge \mathcal{E}) = \underline{\boldsymbol{f}} \otimes \mathfrak{E}$$
$$\mathfrak{E} = \boldsymbol{e}^0 \wedge \boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^2 \wedge \boldsymbol{e}^3$$

4 元的には力密度は $(1,4)$ 形式で表される.

反対称化のツール

- テンソルの反対称化に必要なツールを導入する．ユークリッド空間では $n=3$, ミンコフスキー空間では $n=4$.
- 完全反対称テンソル：

$$\epsilon_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_n} = \begin{cases} 1 & (\nu_1\nu_2\ldots\nu_n \text{ が } 1,2,\ldots,n \text{ の偶置換}) \\ -1 & (\nu_1\nu_2\ldots\nu_n \text{ が } 1,2,\ldots,n \text{ の奇置換}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

一般化されたクロネッカーのデルタ：$(p \le n)$

$$\delta^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_p}_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_p} = \begin{cases} 1 & (\nu_1\nu_2\ldots\nu_p \text{ が } \mu_1\mu_2\ldots\mu_p \text{ の偶置換}) \\ -1 & (\nu_1\nu_2\ldots\nu_p \text{ が } \mu_1\mu_2\ldots\mu_p \text{ の奇置換}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

- クロネッカーのデルタと完全反対称テンソルの関係：

$$\delta^{\alpha_1\dots\alpha_p}_{\beta_1\dots\beta_p} = \frac{1}{q!}\epsilon^{\alpha_1\dots\alpha_p\gamma_1\dots\gamma_q}\epsilon_{\beta_1\cdots\beta_p\gamma_1\dots\gamma_q} \quad \text{where} \quad p+q=n$$

特に, $p=n$ の場合,

$$\delta^{\alpha_1\dots\alpha_n}_{\beta_1\dots\beta_n} = \epsilon^{\alpha_1\dots\alpha_n}\epsilon_{\beta_1\dots\beta_n}$$

2 階テンソルの反対称化：

$$A_{[\alpha\beta]} := \tfrac{1}{2}\left(A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}\right) = \tfrac{1}{2}\delta^{\alpha'\beta'}_{\alpha\beta}A_{\alpha'\beta'}$$

p 階テンソルの反対称化：

$$A_{[\alpha_1\dots\alpha_p]} := \frac{1}{p!}\delta^{\alpha'_1\dots\alpha'_p}_{\alpha_1\dots\alpha_p}A_{\alpha'_1\dots\alpha'_p}$$

Hodge 双対

- 3 次元

$$(*A)^i = \epsilon_{ijk} A_{jk}, \quad (*B)^{ij} = \epsilon_{ijk} B_k, \quad ** = 1$$

- 4 次元

$$(*A)_\alpha = \frac{1}{6}\epsilon_\alpha{}^{\beta\gamma\delta} A_{\beta\gamma\delta}, \quad (*B)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta} B_{\gamma\delta} (*C)_{\alpha\beta\gamma} = \epsilon^\delta_{\alpha\beta\gamma} C_\delta,$$

- 2 重 Hodge 双対

$$\begin{aligned} (*F)_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}, \\ (**F)^{\sigma\tau} &= \frac{1}{4} F^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon^{\alpha\beta\sigma\tau} = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} (-2) \delta^{\sigma\tau}_{\mu\nu} \\ &= -F^{\sigma\tau} \end{aligned}$$

4 元微分形式による電磁気学

- 基本量 (F 場, S 場)

$$F = \boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{e}^0 + c_0 B, \quad H = -\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{e}^0 + c_0 D = c_0 G$$

- 電荷, 電流

$$\mathcal{J} = J \wedge \boldsymbol{e}^0 + c_0 \mathcal{R}$$

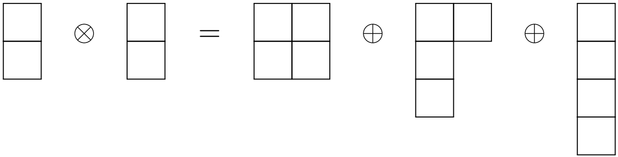
ただし, $\mathcal{R} = \varrho \, \mathcal{E} = \varrho \boldsymbol{e}^1 \wedge \boldsymbol{e}^2 \wedge \boldsymbol{e}^3$ は電荷密度を表す 3 形式

- 構成方程式

$$H = Z_0^{-1} (*F), \quad F = -Z_0 (*H),$$

既約表現

- 2 つの 4 元 2 形式 F, G のテンソル積の $(GL(4)$ に関する$)$ 既約表現



次元的には $6 \times 6 = 20 + 15 + 1.$

- 1 次元の表現 (完全反対称) はラグランジアン密度

$$\mathfrak{L} = \tfrac{1}{2} F \wedge G \quad \overset{\text{SI}}{\sim} \quad \frac{\mathrm{J\,s}}{\mathrm{m^3\,s}}$$

既約表現 (2)

- 15 次元表現．2 形式 $F_{\alpha\beta}$, $G_{\gamma\delta}$ のテンソル積 $T_{\alpha\beta\gamma\delta} := F_{\alpha\beta}G_{\gamma\delta}$ を以下のヤング盤に従って変形する：

$$\begin{array}{|c|c|}\hline \alpha & \delta \\ \hline \beta \\ \cline{1-1} \gamma \\ \cline{1-1}\end{array}$$

- まず添字 α, δ に関して対称化する．

$$S_{\alpha\beta\gamma\delta} := T_{(\alpha|\beta\gamma|\delta)}\frac{1}{2}\left(T_{\alpha\beta\gamma\delta} + T_{\delta\beta\gamma\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(F_{\alpha\beta}G_{\gamma\delta} + F_{\delta\beta}G_{\gamma\alpha}\right)$$

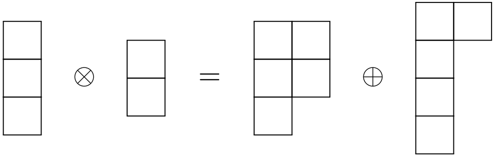
- さらに，添字 α, β, γ について「反対称化」．

$$\begin{aligned} S_{[\alpha\beta\gamma]\delta} &= \frac{1}{2}\left(F_{[\alpha\beta}G_{\gamma]\delta} + F_{\delta[\beta}G_{\gamma\alpha]}\right) = \frac{1}{2}\left(F_{[\alpha\beta}G_{\gamma]\delta} + G_{[\alpha\beta}F_{\gamma]\delta}\right) \\ &= \frac{1}{2}F_{\alpha[\beta}G_{\gamma\delta]} + (F \leftrightarrow G) \end{aligned}$$

これらの操作によって $(1;3)$-形式が得られる．

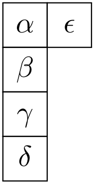
既約表現 (3)

- 4 元 3 形式 $\mathcal{J}$ と 4 元 2 形式 F のテンソル積の既約表現



次元的には $4 \times 6 = 20 + 4.$

- 4 次元の表現に注目. $J_{\alpha\beta\gamma}F_{\delta\epsilon}$ をヤング盤に従って操作する；



既約表現 (2)

- 同様な計算の結果

$$S_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon} = T_{(\alpha|\beta\gamma\delta|\epsilon)} = \frac{1}{2}\left(T_{\alpha\beta\gamma\delta\epsilon} + T_{\epsilon\beta\gamma\delta\alpha}\right)$$

$$\begin{aligned} S_{[\alpha\beta\gamma\delta]\epsilon} = \frac{1}{2}\left(T_{[\alpha\beta\gamma\delta]\epsilon} + T_{\epsilon[\beta\gamma\delta\alpha]}\right) &= \frac{1}{2}\left(J_{[\alpha\beta\gamma}F_{\delta]\epsilon} - J_{\epsilon[\alpha\beta}F_{\gamma\delta]}\right) \\ &= J_{[\alpha\beta\gamma}F_{\delta]\epsilon} \end{aligned}$$

- 最後の等式は以下のようにして確かめることができる.

$$J_{[\alpha\beta\gamma}F_{\delta]\epsilon} = \frac{1}{6}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}J_{\alpha'\beta'\gamma'}F_{\delta'\epsilon} = \frac{1}{6}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}6(*J)^{\delta'}F_{\delta'\epsilon} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}($$

$$\begin{aligned} -J_{\epsilon[\alpha\beta}F_{\gamma\delta]} &= -\frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}\frac{1}{6}\delta^{\epsilon'\alpha''\beta''}_{\epsilon\alpha'\beta'}J_{\epsilon'\alpha''\beta''}F_{\gamma'\delta'} \\ &= -\frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}\frac{1}{6}\epsilon_{\epsilon\alpha'\beta'\mu}\epsilon^{\epsilon'\alpha''\beta''\mu}J_{\epsilon'\alpha''\beta''}F_{\gamma'\delta'} \\ &= -\frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}\epsilon^{\alpha'\beta'\gamma'\delta'}\frac{1}{6}\epsilon_{\epsilon\alpha'\beta'\mu}6(*J)^{\mu}F_{\gamma'\delta'} \\ &= -\frac{1}{4}\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(-2)(2)\frac{1}{2}\delta^{\gamma'\delta'}_{\mu\epsilon}(*J)^{\mu}F_{\gamma'\delta'} = -\frac{1}{4}(-2)(2)\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}(\end{aligned}$$

EM energy-stress tensor

- electromagnetic energy-stress tensor — 機能的に非対称

$$\underline{\overleftarrow{\mathcal{T}}} \doteq T_{\alpha,\beta\gamma\delta} \doteq \begin{array}{c|cccc} \beta\gamma\delta\,/\,\alpha & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 123 & \\ 023 & \\ 031 & \\ 012 & \end{array} \left[\begin{array}{c|c} u & c_0 \boldsymbol{G} \\ \hline c_0^{-1} \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} & -\mathsf{T} \end{array}\right]$$

u	energy density	$\mathrm{W\,s/m^3}$	$\boldsymbol{G}$	momentum density	$\mathrm{N\,s/m^3}$
$\boldsymbol{S}$	Poynting vector	$\mathrm{W/m^2}$	T	Maxwell stress tensor	$\mathrm{N/m^2}$

エネルギー・運動量の流れ

- パワー・力密度 $\overleftarrow{\underline{\mathfrak{f}}}$ はエネルギー・応力テンソル $\overleftarrow{\underline{\mathcal{T}}}$ の微分

$$\overleftarrow{\underline{\mathfrak{f}}} = \underline{\boldsymbol{\nabla}} \wedge \overleftarrow{\underline{\mathcal{T}}} \qquad f_{\alpha,\beta\gamma\delta\epsilon} = \partial_{\epsilon]} T_{\alpha,[\beta\gamma\delta}$$

$$\begin{array}{cc} 0 & 1\ 2\ 3 \\ \multicolumn{2}{c}{\left[\begin{array}{c|c} c_0^{-1}w & \boldsymbol{f} \end{array}\right]} \end{array} = \begin{array}{cc} 0 & 1\ 2\ 3 \\ \multicolumn{2}{c}{\left[\begin{array}{c|c} c_0^{-1}\partial_t & \boldsymbol{\nabla} \end{array}\right]} \end{array} \wedge \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} 0 & 1\ 2\ 3 \end{array} \\ \begin{array}{c} 123 \\ 023 \\ 031 \\ 012 \end{array} & \left[\begin{array}{c|c} u & c_0\boldsymbol{G} \\ \hline c_0^{-1}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} & -\mathsf{T} \end{array}\right] \end{array}$$

- 時間成分, 空間成分

$$w = -\frac{\partial}{\partial t}u - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S} \qquad \text{エネルギー保存}$$

$$\boldsymbol{f} = -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{G} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathsf{T} \qquad \text{運動量保存}$$

おわりに

It's not a mandara, either!