

# ブラックホールのインピーダンス

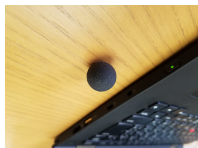
北野 正雄

京都大学

2018年10月6-7日

第8回 QUATUO 研究会 高知工科大学

# はじめに



- ▶ 問題意識
- ▶ 3元微分形式による電磁気学
- ▶ 構成方程式と真空インピーダンス
- ▶ 真空インピーダンスの物理的意味
- ▶ ミンコフスキー空間における電磁気学
- ▶ 一般座標系における電磁気学
- ▶ 一般相対論と電磁気学の構造的アナロジー
- ▶ ブラックホールの時空構造
- ▶ 事象の地平のインピーダンス

## 問題意識

- ▶ 電磁気学は 4 元単位系 (SI) の方が自然な記述が可能である.
  - ▶ 4 種類の場合 ( $E, B, D, H$ ) の役割が明確 (特に時間・空間次元).

$$E \stackrel{\text{SI}}{\sim} \text{V/m}, \quad B \stackrel{\text{SI}}{\sim} \text{Vs/m}^2, \quad H \stackrel{\text{SI}}{\sim} \text{A/m}, \quad D \stackrel{\text{SI}}{\sim} \text{As/m}^2$$

- ▶ 半整数次元が現れない. e.g.,  $E \stackrel{\text{G}}{\sim} \sqrt{\text{dyn/cm}}$
  - ▶ 重要な物理定数である  $Z_0$  が明示される. ガウス単位系では  $Z_0 \stackrel{\text{G}}{=} 1$ .
- ▶ しかし, (理論) 物理の多くの問題は, 3 元単位系 (ガウス単位系) あるいは, さらに正規化で次元を下げた単位系 (自然単位系) で記述されている.
- ▶ ブラックホール (BH) の事象の地平の面抵抗が  $Z_0$  であるという説がある. しかし, (advanced な) 理論展開には, {ガウス, 自然} 単位系が用いられている.
- ▶ BH の電磁気学を 4 元単位系で書き直せば, 理解が進む可能性がある.  
— 白黒写真をカラー化する作業

## 佐藤文隆先生の単位本

- ▶ 物理的考察や文明論など示唆に富んだモノグラフ  
— ありがちな規格書の解説ではない
- ▶ 理論家らしからぬ、実験や工学への深い理解  
— 2018年のSI改訂を予感させる内容



「電子質量を kg で表す気がしれない！」???

- ▶ ただし、電磁気の単位系部分にやや難あり
- ▶ 2018年SI改訂を踏まえて増訂版を作成  
(電磁気パートは北野が主に担当)

# 正誤表 (7 ページ)

## 佐藤文隆著「物理定数と SI 単位」第 3 章の修正

北野 正雄

京都大学大学院工学研究科  
615-8510 京都市西京区京都大学桂

2015 年 10 月 8 日

「物理定数と SI 単位」[1] は物理定数, 単位系に関する話題がコンパクトにまとめられており, ぜひ手許に置きたい一冊である。類書の多くが無味乾燥な事実の羅列に終始したり, 単なるデータ集に過ぎないのに対して, 工学と物理の関係性, 単位の歴史, 文化的視点などを踏まえた, 示唆に富んだ話題が散りばめられており, 教養書としても価値の高い書物である。

ただし, 第 3 章の電磁気学の単位系の部分にやや混乱があり, 誤りも含まれている。本稿では誤りを指摘するとともに, その修正を試みる。

最も目立った問題は, 次元つきの量  $299\,792\,458\text{ m/s}$  と次元なしの数値  $299\,792\,458$  が同じ記号  $c$  で表わされていることである。そのために,  $c$  を含む関係式の両辺の次元をバランスさせることができない場合がある。この問題を解決するために, 記法  $A = \{A\} [A]$  を導入する [2]。物理量  $A$  の単位を  $[A]$  で表し, その単位で表した場合の数値を  $\{A\} (= A/[A])$  と表す方法である。(この分解は単位系依存であるが, ここでは SI での分解だけで十分である。) これを用いると,  $[c] = \text{m/s}$  なので, 数値部分は  $\{c\} = c/[c] = 299\,792\,458$  となる。

ここでの修正の多くが, 数値を意味する  $c$  を  $\{c\}$  で置き換えるというものである。また,  $\mu_0$  などの定数がしばしば次元なしの数値と扱われており, 修正を要する。

また, 電磁気でよく用いられる複数の単位系を比較する場面でいくつかの誤解が存在する。これについては正誤対比の形では対応できないので, いくつかのパラグラフの書き換えを試みた。

## 「正誤表から出た新刊」

# 新SI単位と電磁気学

入力と署名

Acrobat Pro DC  
PDFを印刷・編集  
今すぐ印刷して見よう

2018.10.6-7 6 / 40

佐藤文隆・北野正雄  
Satoshi Hiramatsu Kazumasa Minami

$$\epsilon_0 = \frac{1}{\mu_0 c^2}$$

$$\epsilon_0 = \frac{1}{c_0 Z_0}$$

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

$$\mu_0 = \frac{Z_0}{c_0}$$

## 新SI単位と 電磁気学

電磁気学における  
「ガウス神話」を  
解体する

# 新単位本の目次

1. 物理学と単位系
2. 国際単位系 SI
3. 単位系を定義する現象
4. 電磁気の単位とマクスウェル方程式
5. 電磁気の単位系の進化と単位系間の変換
6. 単位系余話
7. 単位系の数理構造
8. 諸定数表

## 真空インピーダンスの意味

- ▶ 共同執筆中, 議論の多くは「真空インピーダンスは何を表しているのか？」に集中し, 多くのページを費やした.
- ▶ さまざまな観点や, 登場例を通して, より本質に迫ったつもり.
- ▶ ただし, 真空という媒質の「何？」を表しているかについては, 議論がまとまらず. (i) (システム, 非局所, 境界条件)-派 (ii) 局所派.
- ▶ 刊行後, ブラックホールの事象の地平のインピーダンスが  $377\Omega$  という議論があることを知る.



# 電磁気の定数

$$\text{電気定数 } \epsilon_0 = \frac{1}{c_0 Z_0}$$

時空構造定数

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

+

電磁構造定数

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

$$\text{磁気定数 } \mu_0 = \frac{Z_0}{c_0}$$

表紙のデザインに採用

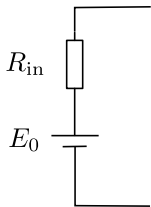
## 真空インピーダンスの物理的意味

- ▶ 平面電磁波の  $E$  と  $H$  の比.
- ▶ アンテナのインピーダンス  $\sim (\lambda/L)Z_0$ .  
特に, 自己補対アンテナの場合は  $= Z_0/2$ .
- ▶ 真空の半空間は面抵抗率  $Z_0$  の膜と等価.
- ▶ 回路で使用する抵抗は  $Z_0$  から大きく離れない
- ▶ 共振器の  $Q$  値の抵抗依存性  $dQ/dR \sim Z_0^{-1}$
- ▶ von Klitzing 定数 (量子ホール効果)  $R_K$        $Z_0/2R_K = \alpha \sim 1/137$   
(微細構造定数).
- ▶ プランク電荷:  $q_P = \sqrt{2h/Z_0}$
- ▶ ブラックホール (事象の地平) の面抵抗率:  $Z_0$  (?)
- ▶ ...

$Z_0$  の重要性, 必然性が腑に落ちる説明を探索中

# インピーダンス（抵抗）に関する思い込み

- ▶ テスター（抵抗レンジ）で電池の内部抵抗が測れる？

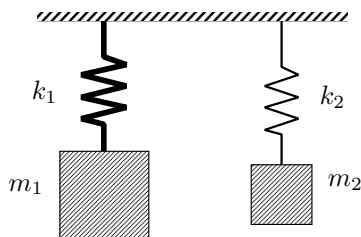


- ▶ 内部抵抗は等価的なもので、通常の抵抗体の中にあるわけではない。
- ▶ 分離できない電源と抵抗
- ▶ 内部抵抗の測定には工夫が必要

## 振動系のインピーダンス

- ▶ 硬いバネに大きい質量を吊るした場合と柔らかいバネに小さい質量を吊るした場合の違いは何か. 共振周波数  $\omega_i = \sqrt{k_i/m_i}$  ( $i = 1, 2$ )
- ▶  $k_1/m_1 = k_2/m_2$  なら,  $\omega_1 = \omega_2$
- ▶ 振動子としての性格は異なるはずである.
- ▶ 違いを示すのが, 振動系インピーダンス

$$Z_{m,i} = \sqrt{k_i m_i} \quad \text{SI} \quad \text{kg/s} \quad (= p_{\max,i}/x_{\max,i})$$



## バネ振動系の方程式

- ▶ バネの状態変数:  $(x, f)$ , のびと復元力,  
おもりの状態変数:  $(p, v)$ , 運動量と速度.

$$xf \overset{\text{SI}}{\sim} \text{J}, pv \overset{\text{SI}}{\sim} \text{J}: \text{相補 (共役) 性}$$

- ▶ 構造方程式:

$$x = k^{-1}f, \quad k \overset{\text{SI}}{\sim} \text{N/m}: \text{バネ定数}$$

$$p = mv, \quad m \overset{\text{SI}}{\sim} \text{kg}: \text{質量}$$

- ▶ 運動方程式:

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dp}{dt} = -f$$

- ▶ 拙速に3つ変数を消去して,  $d^2x/dt^2 = -\omega_0^2 x$  とするのは問題. 構造定数は2つある ( $k$  と  $m$ ) のに, ここには1つのパラメータ

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \overset{\text{SI}}{\sim} 1/\text{s} \text{ しか含まれない.}$$

## バネ振動子のモードによる解法

- ▶ 各系の変数を一つずつ消去して

$$\frac{df}{dt} = kv, \quad \frac{dv}{dt} = -m^{-1}f$$

- ▶ モード変数： $g_{\pm} := f \pm iZ_m v$

$$\frac{dg_{\pm}}{dt} = \mp i\omega_0 g_{\pm}$$

$Z_m := \sqrt{km} \stackrel{\text{SI}}{\sim} \text{kg/s}$  は振動系のインピーダンス.

- ▶ 解は、 $g_{\pm}(t) = A_{\pm} e^{\mp i\omega_0 t}$  より、

$$f(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad v(t) = -\frac{A}{Z_m} \sin(\omega_0 t + \phi)$$

- ▶ インピーダンスは振幅比を与える.

$$Z_m = \frac{f_{\max}}{v_{\max}} = \frac{p_{\max}}{x_{\max}}$$

## 振動系の一般的様相

- ▶ (単純な) 振動系は, 4つの動変数と2つの構造定数で記述される.

	動変数	構造定数
バネ振動子	$(x, f, p, v)$	$(k^{-1}, m)$
LC共振器	$(Q, V, \Phi, V)$	$(C, L)$
...		
電磁場	$(D, E, B, H)$	$(\epsilon_0, \mu_0)$

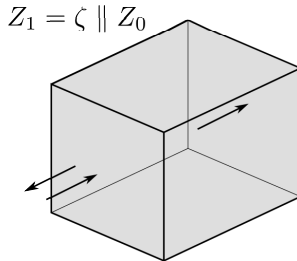
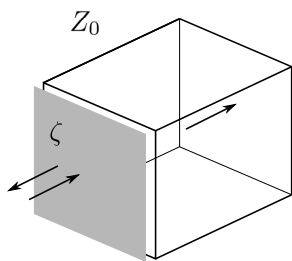
- ▶ 構造定数から, 固有振動数 (速度) とインピーダンスが求められる.
- ▶ 固有周波数  $\omega_0$  だけを求めて満足するのは, 量子論で固有エネルギーを求めて, 固有状態の波動関数に関心を示さないのと同じである.
- ▶ 電磁気学において,  $D, H$  を軽視 (補助場扱い) したり,  $Z_0$  を重要な定数と思わないのは, 不合理である.

## 真空半空間

- ▶ 薄い抵抗体でできた幅  $w$ , 長さ  $l$  の矩形の抵抗器の抵抗

$$R(w, l) = \zeta \frac{l}{w} \stackrel{\text{SI}}{\approx} \Omega$$

$\zeta \stackrel{\text{SI}}{\approx} \Omega$  は面抵抗率. (次元は抵抗と同じ)



- ▶ 面抵抗  $\zeta$  の膜と真空 ( $Z_0$ ) の半空間は,  $Z_1 = \zeta \parallel Z_0$  のインピーダンスの半空間と等価 (反射係数)
- ▶ 真空の半空間は面抵抗  $Z_0$  の膜と等価. 「取り外せない真空」



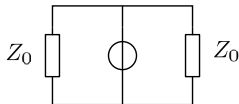
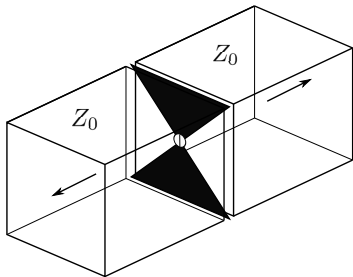
## アンテナのインピーダンス

- ▶ 長さ  $L$  のダイポールアンテナのインピーダンス

$$R(L) = \frac{L}{\lambda} Z_0$$

- ▶ 自己補対アンテナのインピーダンス (真空と完全結合)

$$R_{sc} = \frac{Z_0}{2}$$



# 電磁気学の定式化

## ▶ 多元量の扱い

1. ベクトル・スカラー
2. テンソル
3. 微分形式 (反対称共変テンソル)
4. その他 (4元数, Geometric Algebra, ...)

1. は単純化しすぎ (成分の数だけで分類); 2. は一般的すぎる; 3. は幾何学を反映していて分かりやすい; 4. は一般性に欠ける.

## ▶ 独立変数の選択

1. ポテンシャル派:  $\phi, \mathbf{A}$
2. 2場 (力場) 重視:  $\mathbf{E}, \mathbf{B}$
3. 4場均等:  $\mathbf{E}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{H}$

1., 2. はガウス単位系の影響; 3. が望ましい. 相対論では  $F, G$  に統合.

## 微分形式 — 反対称 (共変) テンソル

- ▶ 1形式 (1階テンソル) は  $E_3$  から実数  $\mathbb{R}$  への線形変換.  $E_3$  は3次元ユークリッド空間.
- ▶ 電場  $\mathbf{E}$  は  $d\mathbf{x} \in E_3$  と電位  $\phi \in \mathbb{R}$  を線形的に関係づけている.

$$\phi = \mathbf{E} \cdot d\mathbf{x}, \quad \mathbf{E} \cdot (\alpha d\mathbf{x} + \beta d\mathbf{y}) = \alpha(\mathbf{E} \cdot d\mathbf{x}) + \beta(\mathbf{E} \cdot d\mathbf{y})$$

- ▶ テンソルは添字付記号のことではない. そう見えるのは成分表示  $d\mathbf{x} = \sum_i dx^i \mathbf{e}_i$  の結果.

$$\phi = \mathbf{E} \cdot \left( \sum_i dx^i \mathbf{e}_i \right) = \sum_i (\mathbf{E} \cdot \mathbf{e}_i) dx^i = \sum_i E_i dx^i$$

- ▶ 双対基底  $(\mathbf{e}^j)$ ,  $\mathbf{e}^j \cdot \mathbf{e}_i = \delta_i^j$  を用いて展開できる.

$$\mathbf{E} = \sum_j E_j \mathbf{e}^j \in E_3^* (\text{双対空間})$$

- ▶ ユークリッド基底では上添字、下添字に区別は無用.

## 2形式

- ▶ 2形式 (2階反対称テンソル) は  $E_3^2$  から実数  $\mathbb{R}$  への双線形変換.
- ▶ 磁束密度  $B$  は  $dx, dy \in E_3$  と磁束  $\varphi \in \mathbb{R}$  を線形的に関係づけている.

$$\Phi = B : dx dy = B \cdot (dx \times dy), \quad dx, dy \text{ について線形}$$

- ▶ 反線形

$$B : dy dx = -B : dx dy \quad \text{または,} \quad B : dx dx = 0$$

- ▶ 成分表示

$$B : \left( \sum_i dx^i e_i \right) \left( \sum_j dy^j e_j \right) = \sum_{i,j} (B : e_i e_j) dx^i dy^j = \sum_{i,j} B_{ij} dx^i dy^j$$

- ▶ 双対基底 ( $e^j$ ) を用いて展開できる.

$$B = \sum_{i,j} B_{ij} e^i e^j = \sum_{i>j} B_{ij} e^i \wedge e^j, \quad e^i \wedge e^j := e^i e^j - e^j e^i$$

### 3 形式

- ▶ 3形式 (3階反対称テンソル) は  $E_3^3$  から実数  $\mathbb{R}$  への3重線形変換.
- ▶ 電荷密度  $\mathcal{R}$  は  $dx, dy, dz \in E_3$  と電荷  $Q \in \mathbb{R}$  を線形的に関係づけている.

$$Q = \mathcal{R} : dx dy dz = \rho(dx \times dy) \cdot dz, \quad dx, dy, dz \text{ について線形}$$

- ▶ 反線形

$$\mathcal{R} : dy dx dz = -\mathcal{R} : dx dy dz, \dots \quad \text{または,} \quad \mathcal{R} : dx dx dz = 0, \dots$$

- ▶ 成分表示

$$Q = \mathcal{R} : \left( \sum_i dx^i e_i \right) \left( \sum_j dy^j e_j \right) \left( \sum_k dz^k e_k \right) = \sum_{ijk} R_{ijk} dx^i dy^j dz^k$$

- ▶ 双対基底 ( $e^j$ ) を用いて展開できる.

$$\mathcal{R} = \sum_{i,j,k} R_{ijk} e^i e^j e^k = R_{123} e^1 \wedge e^2 \wedge e^3, \quad e^i \wedge e^j \wedge e^k := e^{[i} e^j e^{k]}$$

## 場の階数による分類と電磁方程式

階数	ポテンシャル	力場	源場	源
0	$\phi$			
1	$\mathbf{A}$	$\mathbf{E}$	$\mathbf{H}$	
2		$\mathbf{B}$	$\mathbf{D}$	$\mathbf{J}$
3				$\mathcal{R}$

$$d\phi + \partial_t \mathbf{A} = -\mathbf{E}$$

$$d\mathbf{A} = \mathbf{B}$$

$$d\mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D} = \mathbf{J}$$

$$d\mathbf{D} = \mathcal{R}$$

$$0 = d\mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B}$$

$$0 = d\mathbf{B}$$

$$d\mathbf{J} + \partial_t \mathcal{R} = 0$$

## 真空の構成方程式

- ▶  $E$  と  $D$ ,  $B$  と  $H$  の関係は, ホッジの星型演算子  $*$  を用いて

$$E = \varepsilon_0^{-1}(*D) \quad \text{成分では} \quad E_i = \varepsilon_0^{-1} \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} D_{jk}$$

$$B = \mu_0(*H) \quad \text{成分では} \quad B_{ij} = \mu_0 \epsilon_{ijk} H_k$$

ここで,

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & (i, j, k : \text{サイクリック}) \\ -1 & (\text{反サイクリック}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

- ▶ 構成方程式は単なる比例関係ではない.
- ▶  $n$  階のテンソルのパリティは  $(-1)^n$  である. これに従わないものは擬テンソルと呼ばれる.  $\epsilon_{ijk}$ ,  $D$ ,  $H$  はいずれも擬テンソル. すなわち,  $E$ ,  $D$  は奇,  $B$ ,  $H$  は偶である.

## 構成方程式と物理定数

- ▶ ガウス系とは異なり, SI の電磁方程式に光速  $c_0$  は明示的には表れない.
- ▶ 相対論を考慮して構成方程式を以下のように書き直す.

$$\mathbf{E} = Z_0 * (c_0 \mathbf{D}), \quad (c_0 \mathbf{B}) = Z_0 * \mathbf{H}$$

ここに光速  $c_0$ , 真空のインピーダンス  $Z_0$  が現れる:

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$$

- ▶ 真空のインピーダンス  $Z_0$  は光速に匹敵する, 重要な物理定数である.



## 電磁方程式の4元化

- ▶ 基底  $(e_0, e_1, e_2, e_3)$ , 双対基底  $(e^0, e^1, e^2, e^3)$

$$\text{縮約: } e^\alpha \cdot e_\beta = \delta_\beta^\alpha,$$

$$\text{内積: } (e_\alpha, e_\beta) = g : e_\alpha e_\beta = g_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$$

- ▶ 4元ベクトル  $x = (c_0 t) e_0 + x^i e_i = x^\alpha e_\alpha$
- ▶ ポテンシャル

$$V = \phi e^0 - c_0 \mathbf{A}$$

- ▶ F場テンソル, S場テンソル

$$F = \mathbf{E} \wedge e^0 + c_0 B, \quad G = -\mathbf{H} \wedge e^0 + c_0 D$$

- ▶ 電荷・電流密度テンソル

$$\mathcal{J} = J \wedge e^0 + c_0 \mathcal{R}$$

## 電磁方程式の4元化 (2)

- ▶ 微分方程式 ( $dd = 0$ )

$$-dV = F$$

$$dF = 0$$

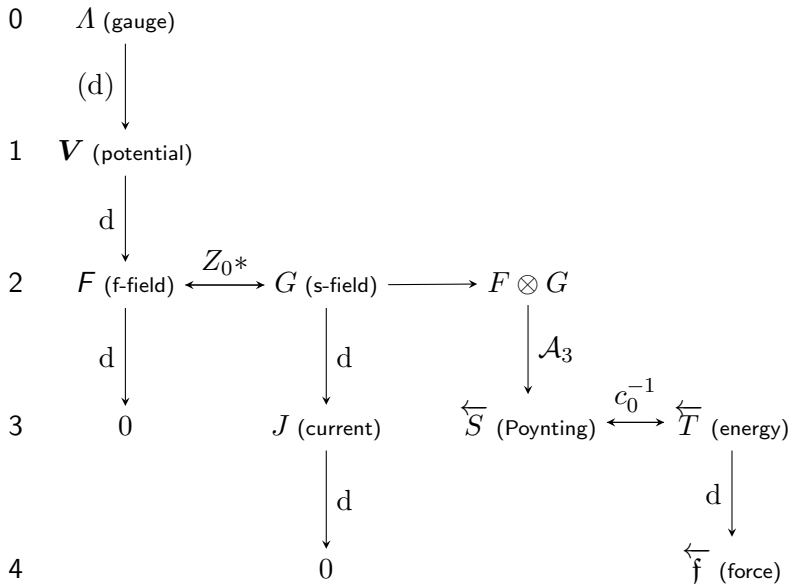
$$dG = \mathcal{R}$$

$$d\mathcal{R} = 0$$

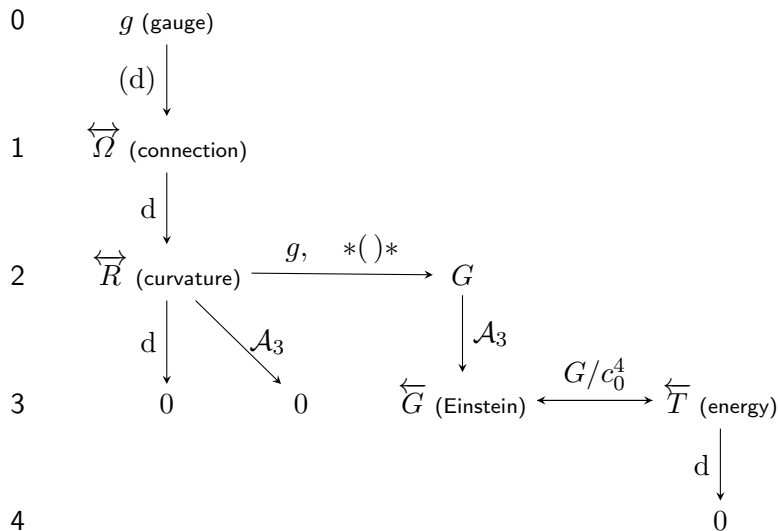
- ▶ 構成方程式 ( $** = -1, Y_0 = 1/Z_0$ )

$$F = Z_0 * G, \quad G = -Y_0 * F$$

# 電磁気学の構造 2018.12.15 に修正

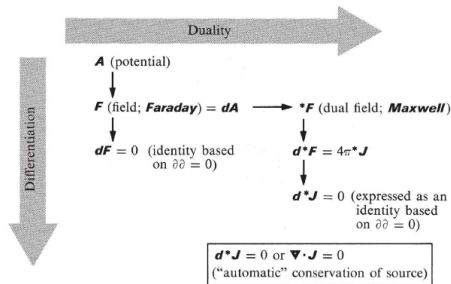


# 重力方程式の構造 2018.12.15 に修正



# Gravitation から

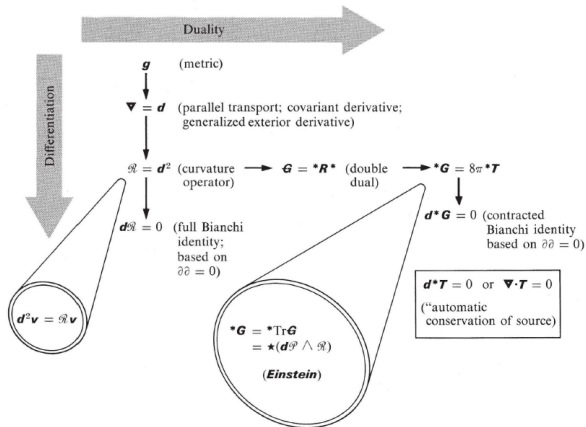
## H. Structure of Electrodynamics in Outline Form



Misner *et al.*: Gravitation p. 370.

# Gravitation から

## I. Structure of Geometrodynamics in Outline Form



## 重力の真空インピーダンス $Z_G$ (仮)

- ▶ Gravito-electromagnetism (線形近似) の枠組み

$$\varepsilon_G := 1/G$$

$$\mu_G := G/c_0^2$$

$$Z_G := G/c_0 \quad \overset{\text{SI}}{\sim} \text{J s/kg}^2$$

- ▶  $Z_0 \overset{\text{SI}}{\sim} \text{J s/C}^2$

## ブラックホールの計量と電磁定数

- ▶ 質量  $M$  に対する Schwarzschild 半径:  $r_S := 2(G/c_0^2)M$
- ▶ (空間) 点対称, 静的な重力場を極座標  $(c_0t, r, \theta, \phi)$  で表した場合の計量 (Schwarzschild 計量) は

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c_0^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

ただし,  $d\Omega^2 := d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2$ .

- ▶  $r = r_S$  (事象の地平) で,  $g_{tt} = 0$ ,  $g_{rr} = \infty$  となる. 特異性を軽減するために, 半径方向の座標を変更する ( $r \geq r_S$ );

$$\rho := \int_{r_S}^r \left(1 - \frac{r_S}{r'}\right)^{-1/2} dr' = r \sqrt{1 - \frac{r_S}{r}} + r_S \tanh^{-1} \sqrt{1 - \frac{r_S}{r}}$$

- ▶ 新たな計量は

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{r_S}{r(\rho)}\right) c_0^2 dt^2 + d\rho^2 + r^2(\rho) d\Omega^2$$



- ▶ 地平線の外側近くでは、 $\rho \sim 2\sqrt{r_S(r - r_S)}$  と近似できるので、

$$ds^2 = -(\rho/2r_S)^2 c_0^2 dt^2 + d\rho^2 + r_S^2 d\Omega^2$$

- ▶ 半径に直交する2次元については、 $x \sim r_S \theta \cos \varphi$ ,  $y \sim r_S \theta \sin \varphi$  ( $\theta \ll 1$ ) とすれば

$$ds^2 = -(\rho/2r_S)^2 c_0^2 dt^2 + d\rho^2 + dx^2 + dy^2$$

- ▶ さらに、Rindler 変換  $c_0 T = \rho \sinh \frac{c_0 t}{2r_S}$ ,  $z = \rho \cosh \frac{c_0 t}{2r_S}$  を行くと、Minkowski 計量に帰着する:

$$ds^2 = -c_0^2 dT^2 + dz^2 + dx^2 + dy^2$$

- ▶ この座標変換は一定加速度  $a = c_0^2/(2r_S) = c_0^4/(4GM)$  で中心に近づき、遠ざかる観測者の系に移ることに対応する。
- ▶ 本質的に（局所的には）平坦な状況だといえる。

## 構成方程式（成分表示）

- ▶ 2つのテンソルを関係づけるには、行列要素の入れ替えが必要。

$$(F_{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & c_0 B_z & -c_0 B_y \\ E_y & -c_0 B_z & 0 & c_0 B_x \\ E_z & c_0 B_y & -c_0 B_x & 0 \end{bmatrix}$$
$$(G_{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} 0 & H_x & H_y & H_z \\ -H_x & 0 & -c_0 D_z & c_0 D_y \\ -H_y & c_0 D_z & 0 & -c_0 D_x \\ -H_z & -c_0 D_y & c_0 D_x & 0 \end{bmatrix}$$

- ▶ Hodge の星型作用素を具体的に表すと、

$$F_{\alpha\beta} = (Z_0/2)\epsilon_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}G_{\gamma\delta} = (Z_0/2)g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu}\epsilon^{\mu\nu\gamma\delta}G_{\gamma\delta}$$

- ▶ 計量の効果は、構成方程式に閉じ込められている。

# 一般座標系における電磁方程式

- ▶ ミンコフスキー空間における電磁方程式:

$$F_{[\alpha\beta,\gamma]} = 0, \quad G_{[\alpha\beta,\gamma]} = 6J_{\alpha\beta\gamma}$$

- ▶ 一般座標では計量テンソル  $g(x)$  が時間, 空間に依存する. 場の微分においては接続を考慮した, 「共変微分」を考える必要がある.
- ▶ ベクトル場  $V$  の共変微分

$$V_{\alpha;\beta} = V_{\alpha,\beta} + \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} V_{\gamma} \quad (V_{\alpha,\beta} \text{ は通常の微分})$$

計量  $g$  による接続  $\Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma} = g^{\gamma\mu}(g_{\mu\alpha,\beta} + g_{\mu\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\mu})/2$  の表現から,  $\alpha, \beta$  について対称なので, 反対称化した外微分は接続の影響を受けないことが分かる:  $V_{[\alpha;\beta]} = V_{[\alpha,\beta]}$ .

- ▶ 外微分で表された電磁方程式 (微分方程式) は接続の影響を受けない.

## 一般座標系における構成方程式

- ▶ ミンコフスキー空間における量に '̄' をつけて表す。  
基底を  $(\bar{e}_0, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$  とおき, 構成方程式を成分で書くと,

$$\bar{F}_{\alpha\beta} = \frac{Z_0}{2} \bar{g}_{\alpha\mu} \bar{g}_{\beta\nu} \bar{\epsilon}^{\mu\nu\gamma\delta} \bar{G}_{\gamma\delta}$$

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \quad \bar{\epsilon}^{\mu\nu\gamma\delta} = [\mu\nu\gamma\delta]$$

- ▶ 基底の変換  $e_\alpha(P) = L_\alpha^\beta(P) \bar{e}_\beta$ ,  $e^\alpha(P) = (L^{-1})^\alpha_\beta(P) \bar{e}^\beta$
- ▶  $g = g_{\alpha\beta} e^\alpha e^\beta = \bar{g}_{\alpha\beta} \bar{e}^\alpha \bar{e}^\beta$  から,  $g_{\alpha\beta}(P) = \bar{g}_{\mu\nu} L^\mu_\alpha(P) L^\nu_\beta(P)$ .
- ▶  $\epsilon^{\mu\nu\gamma\delta} = [\mu\nu\gamma\delta] / \sqrt{-g}$ ,  $g = \det[g_{\alpha\beta}]$ .
- ▶ 新しい基底では

$$F_{\alpha\beta} = \frac{Z_0}{2} g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} \epsilon^{\mu\nu\gamma\delta} G_{\gamma\delta} = \frac{Z_0}{2} \frac{g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu}}{\sqrt{-g}} [\mu\nu\gamma\delta] G_{\gamma\delta}$$

- ▶ 計量の影響は構成方程式に局限されている。

## 一般座標系における構成方程式 (2)

- ▶ 基底のスケール変換  $e_\alpha = h_\alpha \bar{e}_i$  ( $\alpha = 0, 1, 2, 3$ ),  $e^\alpha = \bar{e}^\alpha / h_\alpha$ .
- ▶ 計量:  $g_{\alpha\beta} = h_\alpha^2 \bar{g}_{\alpha\beta}$ .
- ▶ (双対) 体積要素:  $\epsilon^{\mu\nu\gamma\delta} = (h_0 h_1 h_2 h_3)^{-1} [\mu\nu\gamma\delta]$ ,
- ▶ 新しい基底では

$$\begin{aligned} F_{\alpha\beta} &= \frac{Z_0}{2} \sum_{\mu\nu} \sum_{\gamma\delta} \frac{h_\alpha^2 h_\beta^2}{\sqrt{-g}} \bar{g}_{\alpha\mu} \bar{g}_{\beta\nu} [\mu\nu\gamma\delta] G_{\gamma\delta} \\ &= \frac{Z_0}{2} \sum_{\gamma\delta} \frac{h_\alpha^2 h_\beta^2}{\sqrt{-g}} \sigma(\alpha) \sigma(\beta) [\alpha\beta\gamma\delta] G_{\gamma\delta} \end{aligned}$$

ただし,  $\sigma(\alpha) := (1 - 2\delta_{0\alpha})$ .

## 一般座標系における構成方程式 (3)

- ▶  $(\alpha, \beta) = (0, i)$ , あるいは  $(\alpha, \beta) = (j, k)$  ( $i, j, k = 1, 2, 3$ ) の場合:

$$F_{0i} = -Z_0 \frac{h_0 h_i}{h_j h_k} G_{jk}, \quad F_{jk} = Z_0 \frac{h_j h_k}{h_0 h_i} G_{0i}, \quad \epsilon_{ijk} = 1$$

- ▶ 具体的に書くと,

$$E_1 = -F_{01} = Z_0 \frac{h_0 h_1}{h_2 h_3} G_{23} = Z_0 \frac{h_0 h_1}{h_2 h_3} (c_0 D_1)$$
$$c_0 B_1 = F_{23} = Z_0 \frac{h_2 h_3}{h_1 h_0} G_{01} = Z_0 \frac{h_2 h_3}{h_1 h_0} (-H_1)$$

- ▶ 誘電率テンソル  $[\epsilon]$ , 透磁率テンソル  $[\mu]$  は

$$\frac{[\epsilon]}{\epsilon_0} = \frac{[\mu]}{\mu_0} = [1 + \chi] = \frac{h_2 h_3}{h_0 h_1} \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \frac{h_3 h_1}{h_0 h_2} \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2 + \frac{h_1 h_2}{h_0 h_3} \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3$$

- ▶ 比例関係  $[\mu] = Z_0^2 [\epsilon]$  を満たしており, インピーダンス整合がとれており反射はない.

## ブラックホールの計量

- ▶ Schwarzschild 計量:  $h_0 = h_3^{-1} \neq 1, h_1 = h_2 = 1$

$$ds^2 \sim - \left(1 - \frac{r_S}{r}\right) c_0^2 dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + dx^2 + dy^2$$

$$[1 + \chi] = \mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 + h_0^{-2} (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) \quad 1 \text{ 軸異方性}$$

- ▶ Rindler 計量:  $h_0 \neq 1, h_3 = h_1 = h_2 = 1$

$$ds^2 = - \left(\frac{\rho}{2r_S}\right)^2 c_0^2 dt^2 + d\rho^2 + dx^2 + dy^2$$

$$[1 + \chi] = h_0^{-1} (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \mathbf{e}_2) = h_0^{-1} [1] \quad \text{等方的}$$

- ▶ いずれの場合も、誘電率、透磁率、2つのテンソルが連動して変化するので、無反射条件はつねに満たされている。

## まとめにかえて

- ▶ 真空インピーダンスの意味をさらに問い続ける
- ▶ 事象の地平の電磁的性質をさらに調べる
- ▶ 電磁気学と重力理論の（微分形式的）アナロジを追及する