

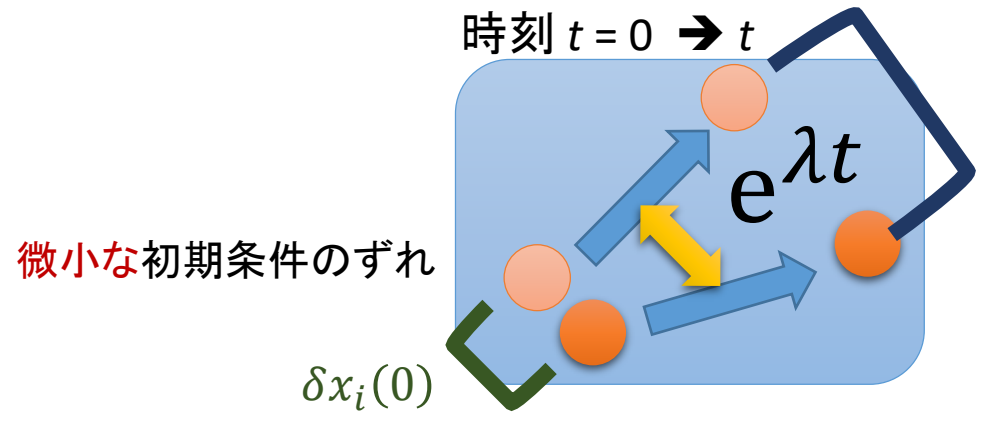
量子Lyapunovスペクトル: Sachdev-Ye-Kitaev模型および量子XXZスピン鎖を例として

手塚真樹 (京都大学理学研究科)

Introduction: 古典系の有限時間 Lyapunov スペクトルの準位統計

[M. Hanada, H. Shimada and MT, PRE 2018 (arXiv:1702.06935)]

K 個の自由度をもつ古典系



t でのずれ: 初期状態のずれに関し線形

$$\delta x_i(t) = M_{ij} \delta x_j(0)$$

$$M_{ij} = \frac{\delta x_i(t)}{\delta x_j(0)}$$

M_{ij} の特異値: $\{\lambda_k(t)\}_{k=1}^K$

時間依存リアプノフスペクトル

$$\left\{ \lambda_k(t) = \frac{\log \alpha_k(t)}{t} \right\}_{k=1,2,\dots,K}$$

通常、 $t \rightarrow \infty$ 極限を考え、もし $\max(\lambda_k) > 0$ ならカオス
本研究: 有限時間でふるまいに着目

リアプノフスペクトル $\{\lambda_k(t)\}_{k=1}^K$ は系の詳細に依存する
→カオス系に共通するユニヴァーサルティ?

数値的結果からの期待

多くのカオス系で、自由度 K が大きいとき、ある時間スケールで、リアプノフスペクトルはランダム行列のようにふるまう。

成分がガウス分布するランダム行列:

- GOE (Gaussian Orthogonal Ensemble) 実対称; $\beta = 1$
- GUE (G. Unitary E.) 複素エルミート; $\beta = 2$
- GSE (G. Symplectic E.) 四元数エルミート; $\beta = 4$

量子系のスペクトル統計: 古くから多くの研究

- 原子核の準位 [Wigner, ...]
- シナイビリヤードのシュレディンガー方程式 [Bohigas, Giannoni, Schmit PRL 1984]

固有値の結合確率分布

$$p(e_1, e_2, \dots, e_K) \propto \prod_{1 \leq i < j \leq K} |e_i - e_j|^\beta \prod_{i=1}^K e^{-\beta K e_i^2/4}$$

準位間反発

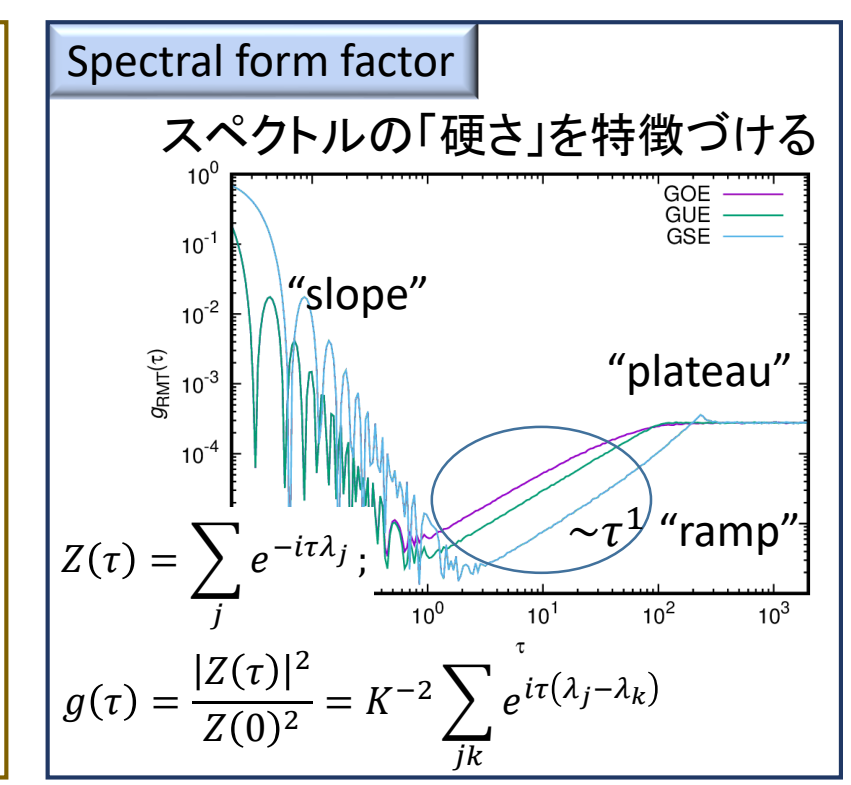
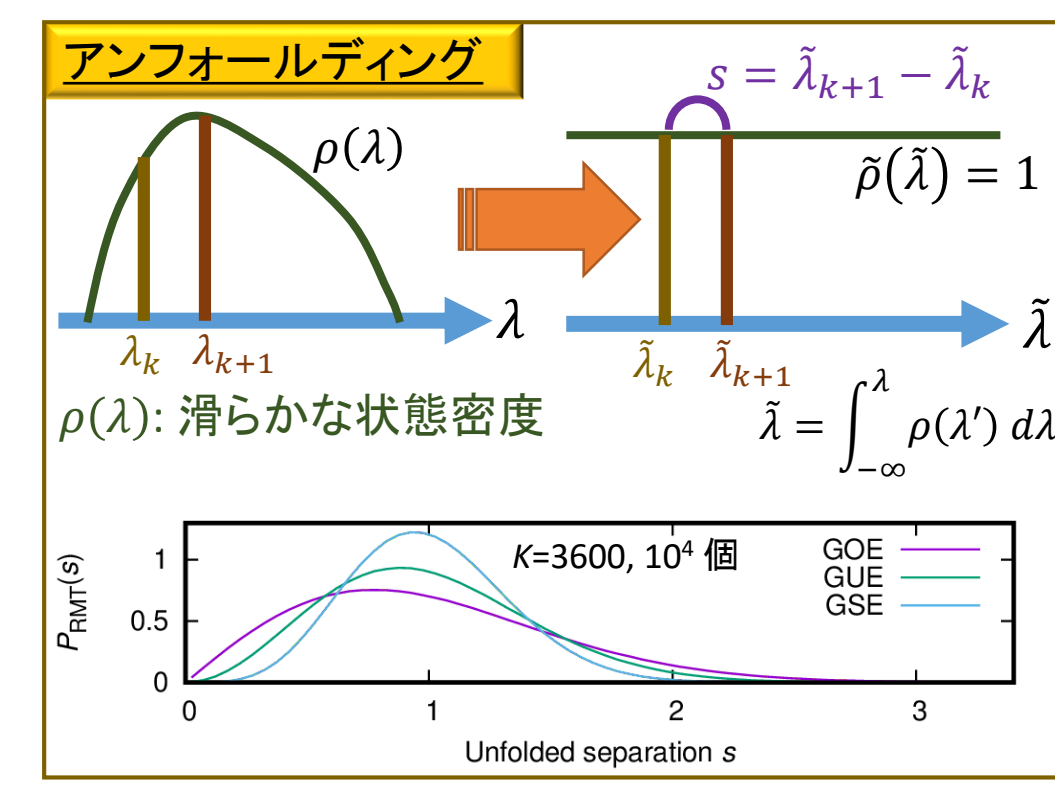
cf. ランダム結合系のリアプノフスペクトル

- [S. K. Patra and A. Ghosh]
- 蔵本モデル [PRE 93, 032208 (2016)],
- マップネットワーク [EPL 117, 60002 (2017)]

古典系のリアプノフスペクトル:
 $t \rightarrow \infty$ 極限で全体を精度高く求めることは困難

数値的結果

リアプノフスペクトルをアンフォールドしたときの間隔分布 $P(s)$ は、自由度 K が大きいとき、ある時間スケールで、ランダム行列の固有値の間隔分布 $P_{\text{RMT}}(s)$ に近づく。Spectral form factor も、ランダム行列のものに近づく。



本研究: 量子系への拡張の提案

[H. Gharibyan, M. Hanada, B. Swingle and MT, arXiv:1809.01671]

[Norbert Wiener 1938][Larkin & Ovchinnikov 1969]

古典系で、正準共役な量 x, p の異なる時刻での関係

$$\{x(t), p(0)\}_{\text{PB}}^2 = \left(\frac{\partial x(t)}{\partial x(0)} \right)^2 \rightarrow e^{2\lambda t}$$

特異値: $\{s_k(t)\} = \{e^{2\lambda_k t}\}$

$$L = \left(\frac{\delta x_i(t)}{\delta x_j(0)} \right)^2$$

量子系での対応物: Bose的な演算子 V, W なら、

$$C_T(t) = -\langle [\hat{V}(t), \hat{W}(0)]^2 \rangle$$

展開すると out-of-time correlator (OTOC) が出る:

$$\langle \hat{V}(t) \hat{W}(0) \hat{V}(t) \hat{W}(0) \rangle \text{ etc.}$$

本研究: 系の状態 ϕ (例えば固有状態) について

$\langle \phi | \hat{L}_{ab}(t) | \phi \rangle$ の特異値 $\{s_k(t)\}_{k=1}^N$ を求め、

リアプノフスペクトルを $\left\{ \lambda_k(t) = \frac{\log s_k(t)}{2t} \right\}$ で定義。

例1: Sachdev-Ye-Kitaev模型

[Sachdev and Ye 1993][Kitaev 2015][Sachdev 2015]

冷却気体系での実現提案: [I. Danshita, M. Hanada and MT, PTEP 2017]

$N \gg 1$ で解析的に解けて、低温の極限で

「カオスの上限」を満たす [Kitaev's talks at KITP; S. Sachdev, PRX 5, 041025 (2015); ...]

「カオスの上限」: “物理的に自然な” 仮定のもとで $\lambda_L \leq \frac{2\pi k_B T}{h}$

[J. Maldacena, S. H. Shenker, and D. Stanford, JHEP 1608, 106 (2016)]

一体ホッピングの項はカオス性を抑制

e.g. [A. M. Garcia-Garcia, B. Loureiro, A. Romero-Bermudez, and MT, PRL 2018 (arXiv:1707.02197)]

最大リアプノフ指数と温度の比にピーク、低温では非カオス的

$$\hat{H} = \sum_{1 \leq a < b < c < d} J_{abcd} \hat{\chi}_a \hat{\chi}_b \hat{\chi}_c \hat{\chi}_d + i \sum_{1 \leq a < b} K_{ab} \hat{\chi}_a \hat{\chi}_b$$

ガウシアンランダムな全結合

J_{abcd} : average 0, standard deviation $\frac{\sqrt{6}}{N^{3/2}}$
 K_{ab} : average 0, standard deviation $\frac{K}{\sqrt{N}}$

反交換子を考える。

$$\hat{M}_{ab}(t) = \{\hat{\chi}_a(t), \hat{\chi}_b(0)\}$$

$$\hat{L}_{ab}(t) = \sum_{j=1}^N \hat{M}_{ja}(t) \hat{M}_{jb}(t)$$

エンタングルメントエントロピー

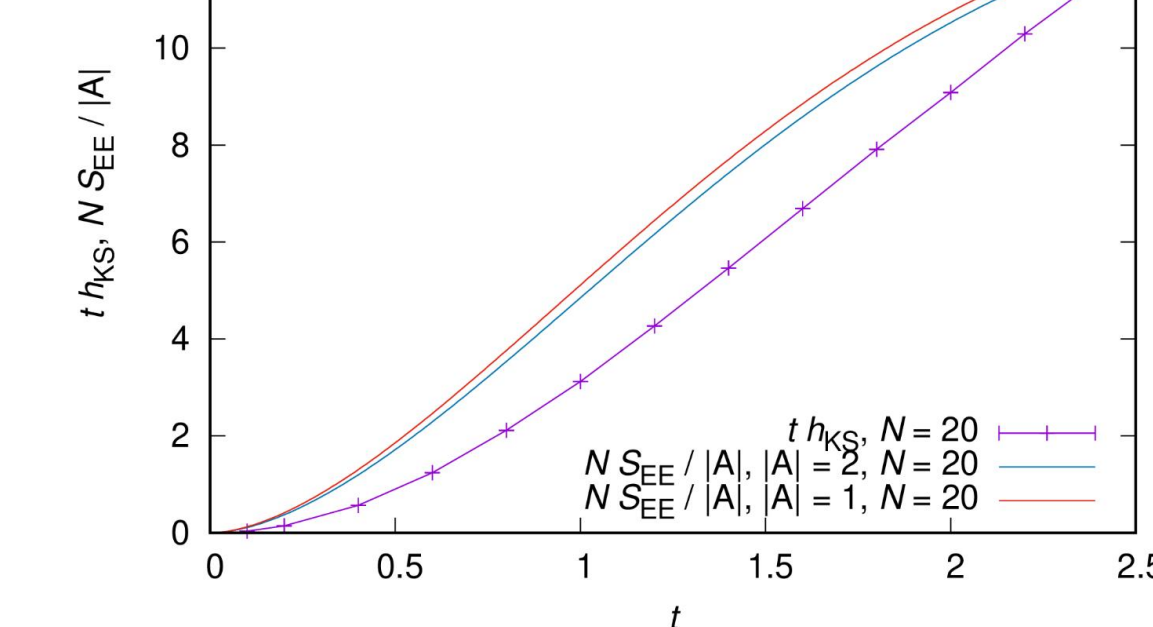
初期状態: $|\psi(t=0)\rangle = |000\dots 000\rangle$ (複素フェルミオン基底)

$$e_j = \frac{(x_{2j-1} + i x_{2j})}{\sqrt{2}}$$

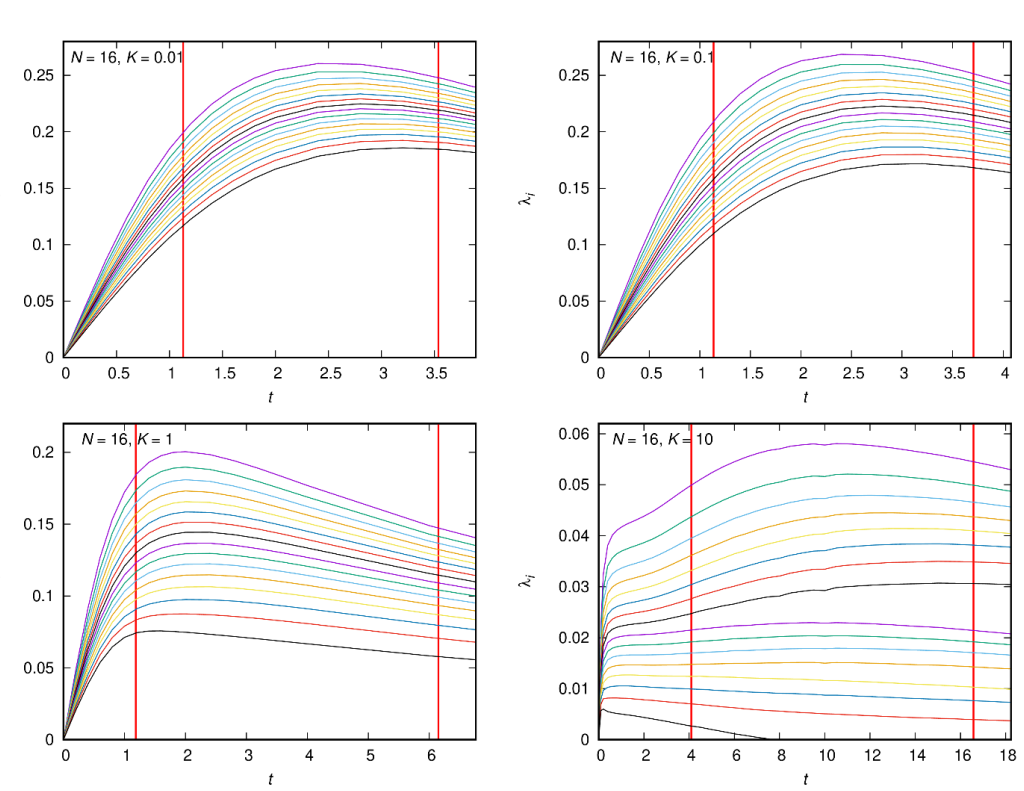
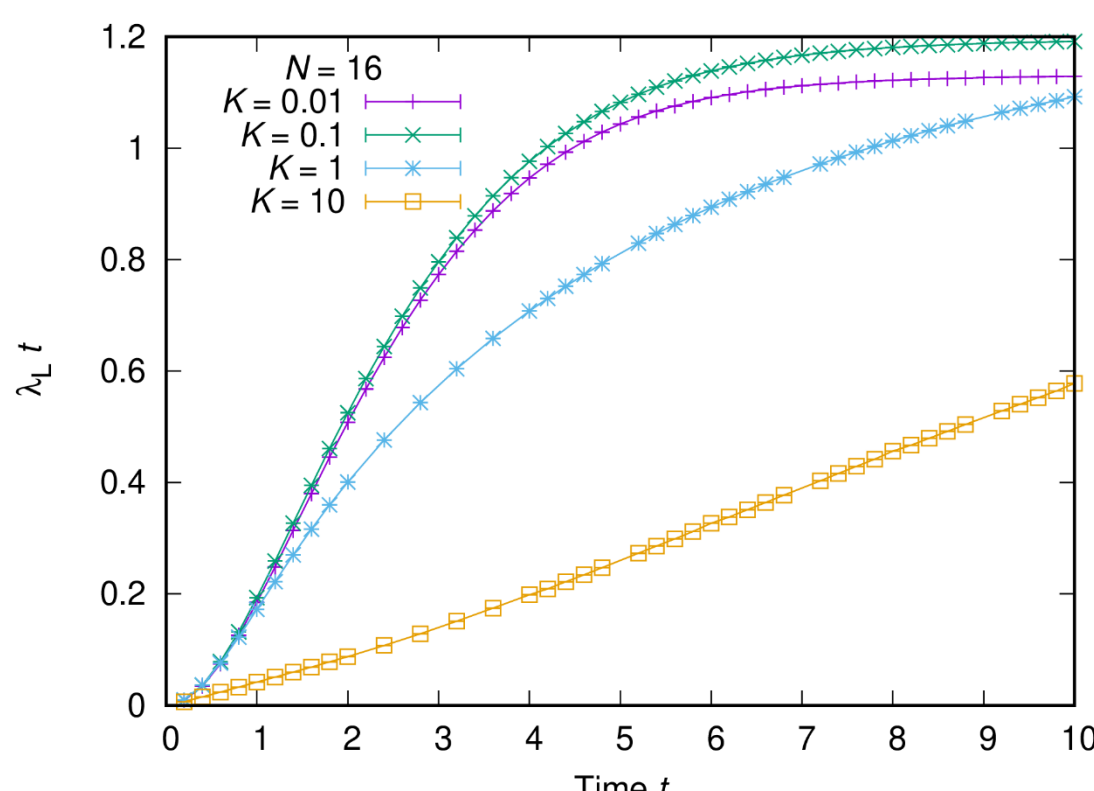
$$\rho_A(t) = \text{Tr}_B \rho(t), \quad S_{\text{EE}}(t) = -\text{Tr} \log(\rho_A(t))$$

$$\rho(t) = |\psi(t)\rangle \langle \psi(t)|$$

正の $\lambda_i(t)$ の和とエンタングルメントが、ほぼ同じ時間スケールで増大



複素フェルミオンで書くと、個数のパリティを保存
→ $2^{N/2-1}$ 次元の行列の対角化 ($N \leq 34$ で可能)

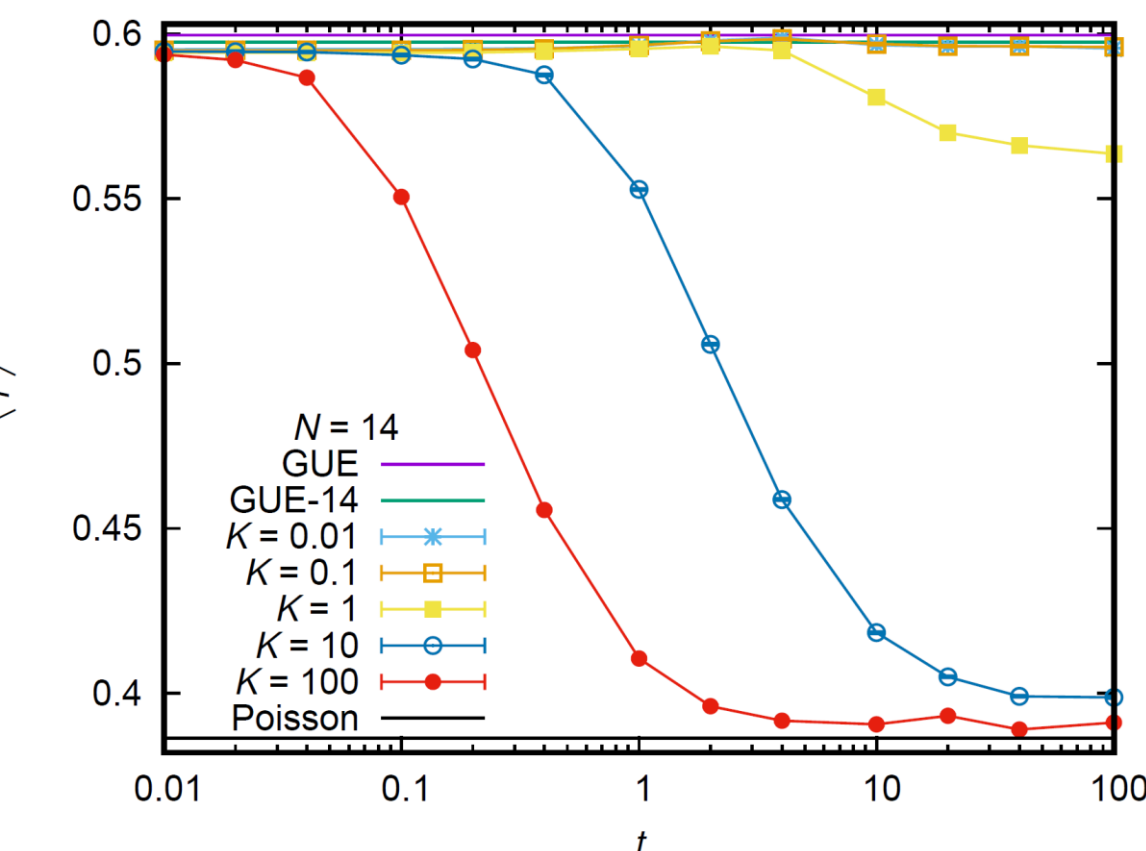
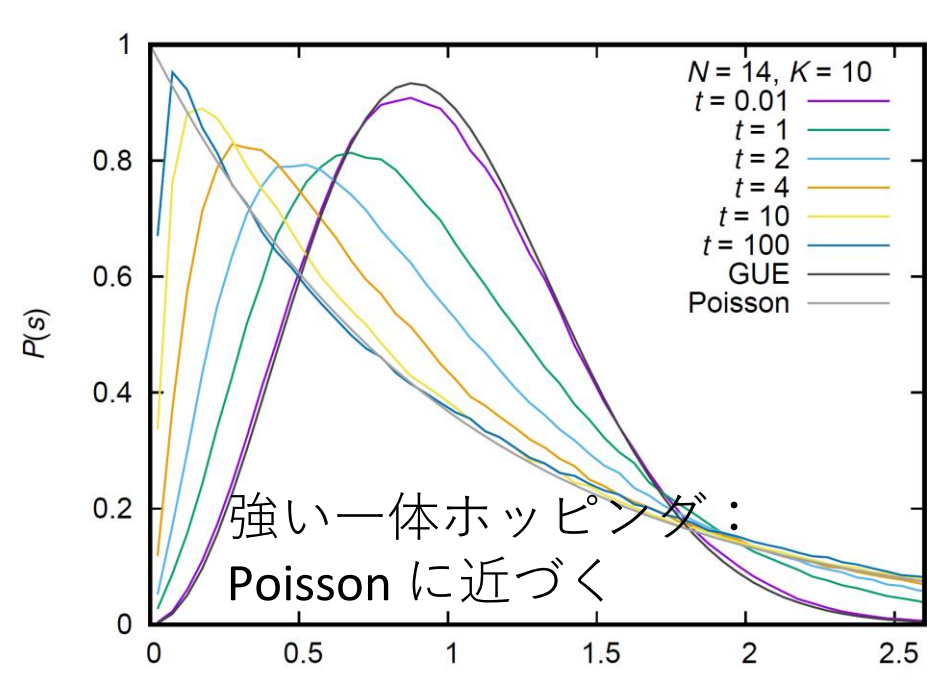
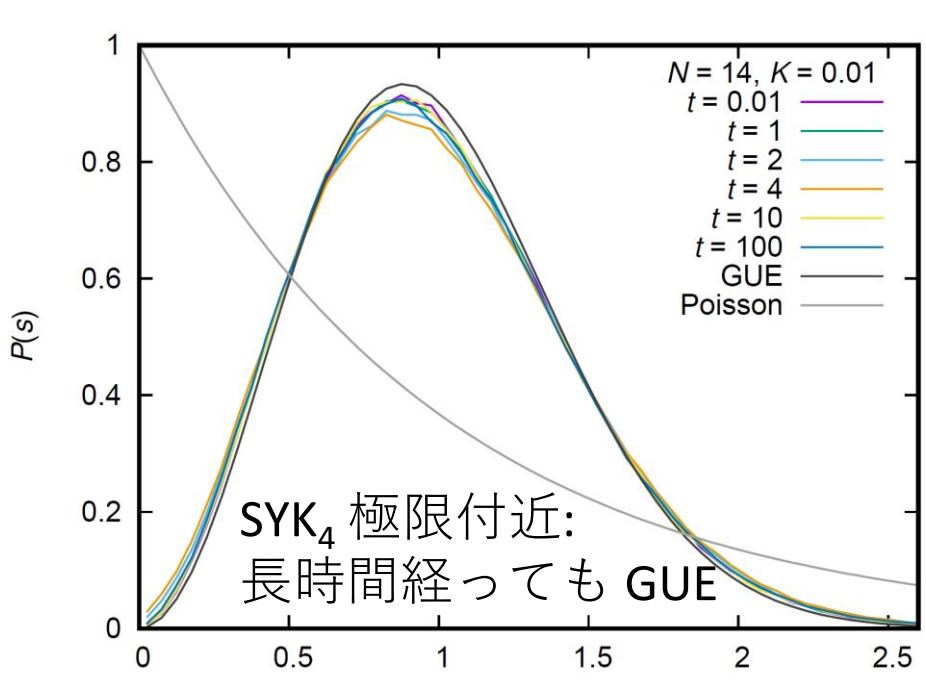


$\langle r \rangle$: average adjacent gap ratio, $\frac{\min(\epsilon_{i+1} - \epsilon_i, \epsilon_{i+2} - \epsilon_{i+1})}{\max(\epsilon_{i+1} - \epsilon_i, \epsilon_{i+2} - \epsilon_{i+1})}$ の平均

無相関(ポアソン分布)の場合: $2 \log 2 - 1 \approx 0.386$

相関がある場合: より大 (GOE: 0.5307, GUE: 0.5996 etc.) [Atas et al., PRL 2013]

(Fixed- i) unfold したときの準位間隔分布



エントロピー生成に関して

SYK₄ 極限

- λ_N と $\lambda_{\text{OTOC}} = \frac{1}{2t} \log \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e^{2\lambda_i t} \right)$ は互いに近づき、差は $1/N$ で減少
- λ_N と λ_1 についても同様。リアプノフスペクトルは単一のピークに接近。
- 強結合では、全てが「カオスの上限」を満たすと期待。
- エンタングルメントエントロピーの生成率 $\sim h_{\text{KS}} =$ 正の(全ての) λ_i の和

→我々の conjecture: ブラックホールは

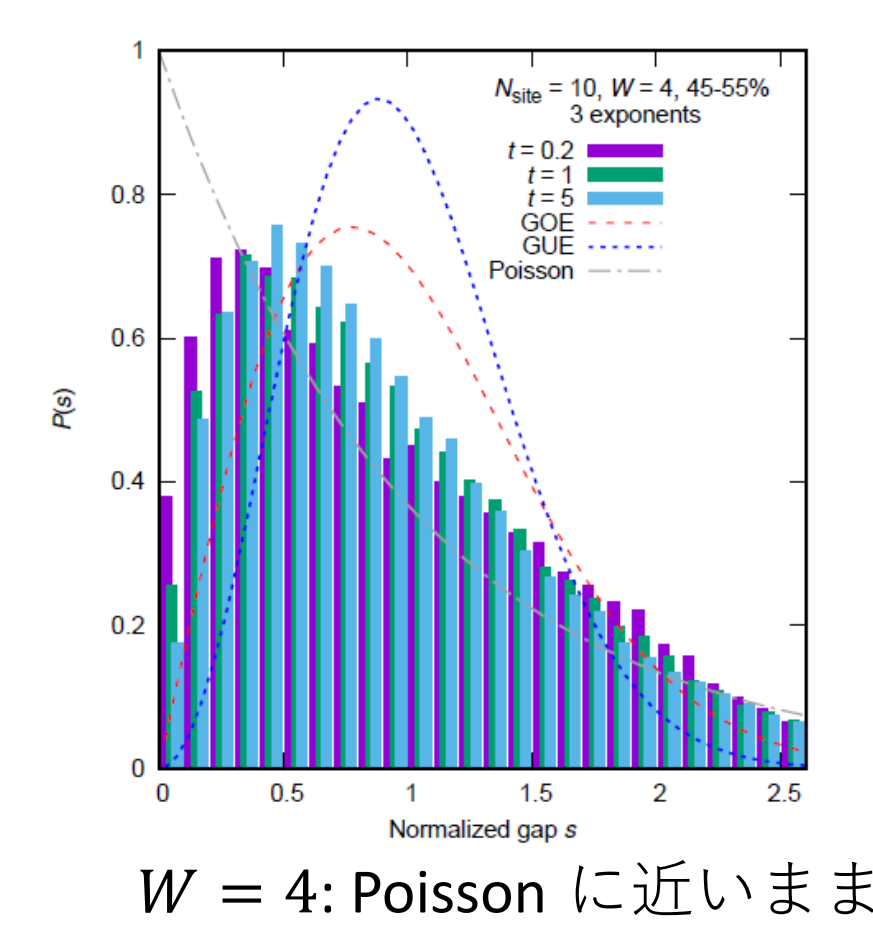
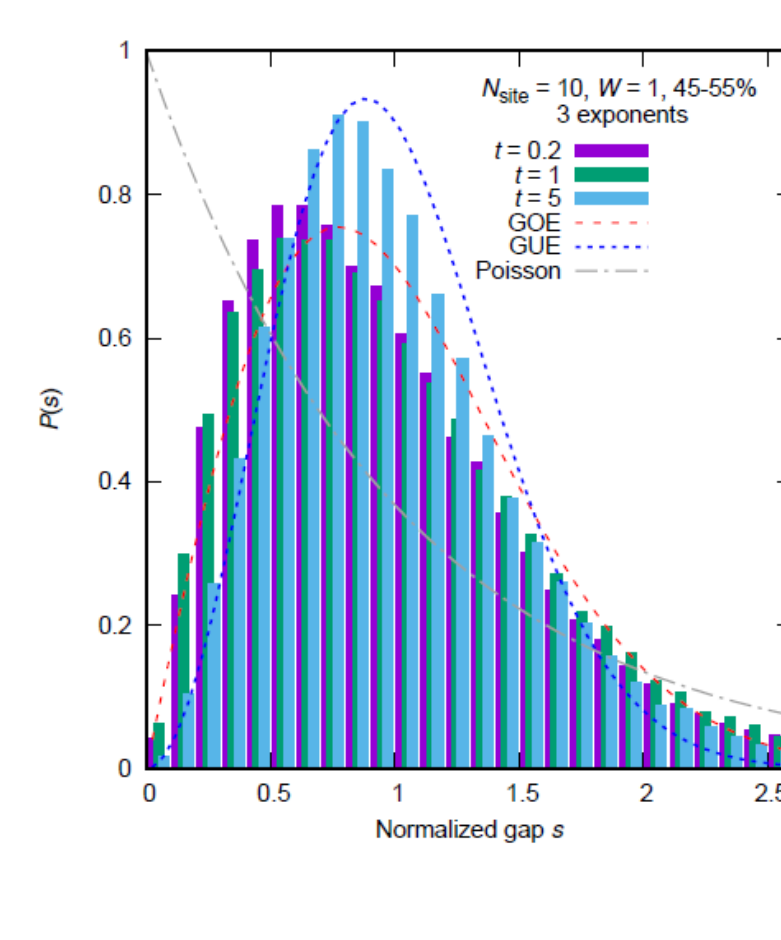
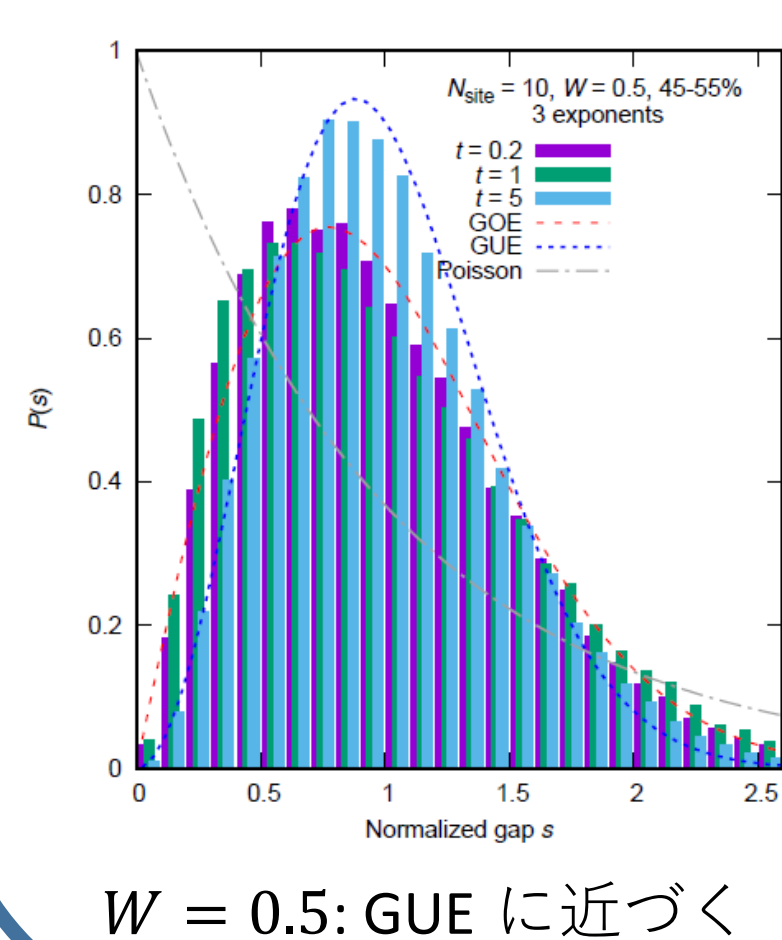
- 最速のスクランブラーである [Sekino and Susskind 2008] だけでなく、
- 最速のエントロピー生成系でもある

例2: ランダム磁場XXZスピン鎖

多体局在 (MBL) の典型的模型, $W_c \approx 3.7$ で全ての状態が局在
e.g. [D. J. Luitz, N. Laflorencie, and F. Alet, PRB 91, 081103 (2015)]

$$\hat{H} = \sum_i \hat{S}_i \cdot \hat{S}_{i+1} + \sum_i h_i \hat{S}_i^z \quad h_i: \text{一様分布 } [-W, W]$$

$$\hat{M}_{ab}(t) = [\hat{S}_a^x(t), \hat{S}_b^z(0)]$$



$W = 0.5$: GUE に近づく

$W = 4$: Poisson に近いまま

さらに: 時間相関行列の特異値の対数

SYK, largest 3 exponents

Fixed- i unfolded log of singular values of $G_{ab}^{(\phi)} = \langle \phi | \hat{\psi}_a(t) \hat{\psi}_b(0) | \phi \rangle$

Preliminary

XXZ, all non-trivial exponents

$$G_{ab}^{(\phi)} = \langle \phi | \hat{\sigma}_a^x(t) \hat{\sigma}_b^z(0) | \phi \rangle$$

Preliminary

まとめ

有限時間での量子リアプノフ指数を定義し、量子カオスの特徴づけを試みた。SYK模型およびその変形, XXZ模型で、カオス的な状況でランダム行列と対応する準位統計, そうでない状況でポアソンの準位統計がみられる。同様のふるまいは、時間相関行列の特異値からも得られる可能性がある。