

ベクトルポテンシャルの古典・量子力学的解釈

2017. 10. 4()

谷村 希希 (名古屋大学)

磁場 \mathbf{B} ^{satisfying} $\text{div } \mathbf{B} = 0 \iff \exists$ ベクトルポテンシャル \mathbf{A} such that $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$
ゲージ不定性 $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \text{grad } \chi$

静電場 \mathbf{E} $\text{rot } \mathbf{E} = 0 \iff \exists$ スカラーポテンシャル φ $\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi$

定数不定性 $\varphi' = \varphi + C$
付加項の不定性

A の正体?

通説的には

A は 古典物理的 意味はない (ゲージ不定性があるから)

量子物理に於いてのみ意味がある (Aharonov-Bohm 効果は

$\mathbf{B} = 0$ であっても A の影響があるから)

という言われ方をしている。

歴史的には

Maxwell: A は "electromagnetic momentum" と呼んだ (1865年論文)

J.J. Thomson もこの立場で "electromagnetic momentum" (1873年の Treatise)

Heaviside と Hertz

A は purely mathematical device として見えた。
(1954)

Yang, Mills, 内山 (1956) : 非可換ゲージ理論

Aharonov-Bohm (1959) : 中村の A-B 効果

一方

A には 古典物理的意味がある、という主張も (あるから)

A は使われても AB 効果の説明できるという主張も (最近 Vaidman の論文も)
が別々の人からなされている。

これらを紹介するのが 今回の講演。

参考文献 D.J. Griffiths "Electromagnetic Momentum" Am J Phys
80, 7-18 (2002)

Reference が 発表している。

L. Vaidman "Role of potentials in the Aharonov-Bohm effect"

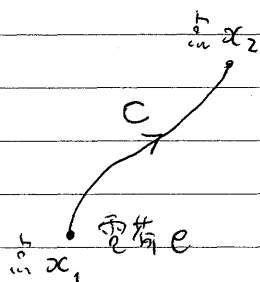
Phys Rev A 86, 040101

すみません、娘が落書きしてしまいました。

2017. 10. 4 ()

谷村の説

電荷の位置エネルギー とこの スカラーポテンシャル
環電流の " ベクトルポテンシャル

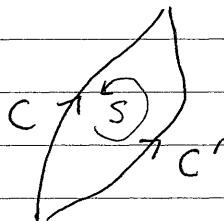


静電場 E の中で
点電荷 e を (やりくり)
曲線 C に沿って運ぶのに要する仕事

$$W = -e \int_C E$$

$$E = E_x dx + E_y dy + E_z dz$$

電場 1-form



異なる経路 C' を選んでも仕事は同じ. Stokes theorem

$$\int_{C'} E - \int_C E = \int_{C'-C} E = \int_{\partial S} E = \int_S dE = 0$$

静電場は $dE = 0$ ($\text{rot } E = 0$)

$\therefore E = -d\varphi$ なる 0-form φ が存在.

$$W = -e \int_C E = +e \int_C d\varphi = e \int_{\partial C} \varphi = e\varphi(x_2) - e\varphi(x_1)$$

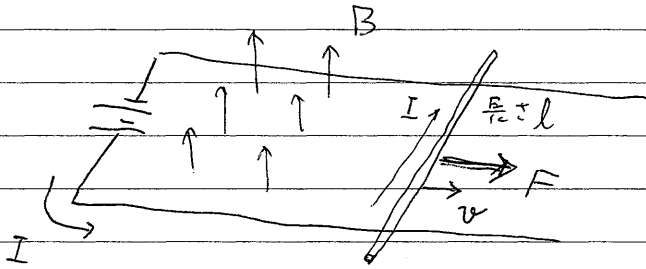
$$= U(x_2) - U(x_1)$$

\therefore 点電荷の位置エネルギー $U(x) = e\varphi(x)$ が well-defined.

基準点 x_1 の選び方 $\longleftrightarrow \varphi' = \varphi + c$ という定数付加の不変性

2017. 10. 4 ()

磁場中での電流回路を変形するのに要する仕事を考える。

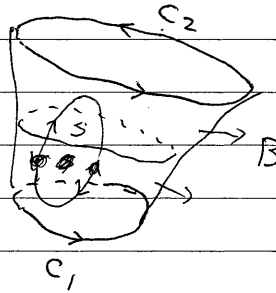
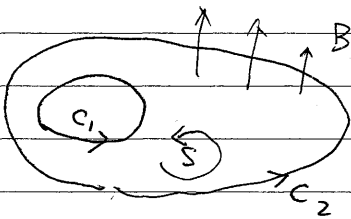


これは \vec{v} の力に要する仕事

面積速度

force $F = IBl$

power $P = F \cdot v = IB \underbrace{lv}_{\text{面積速度}} = IB \frac{dS}{dt} = I \frac{d}{dt} \int B dS$



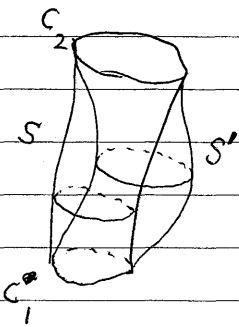
静磁場 B の中で

定電流 I が流れる閉回路 C を

曲面 S に沿って変形・変位するのに要する仕事

$W = -I \int_S B$

$B = B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$
磁場 2-form

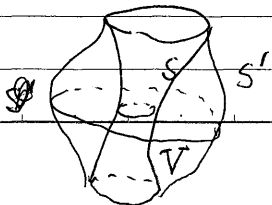


異なる経路 S' を選んでも

$\int_{S'} B - \int_S B = \int_{S'-S} B = \int_{\partial V} B = \int_V dB = 0$

Stokes

磁場は $dB = 0$ ($\text{div } B = 0$)



$B = dA$ なる 1-form A が存在.

2017. 10. 4 ()

$$W = -I \int_S B = -I \int_S dA = -I \int_{\partial S} A = -I \left\{ \int_{C_2} A - \int_{C_1} A \right\}$$

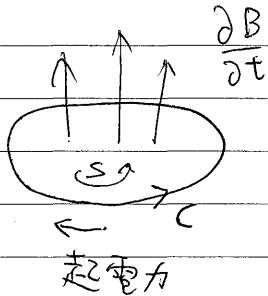
∴ 環電流の位置エネルギー $U(C) = -I \int_C A$ が well-defined.

(閉ループ C についてのみ $U(C)$ が定義される)

$A \rightarrow A' + dX$ (X は任意の 0-form) の不定性は残る。

$$\int_C A' = \int_C (A + dX) = \int_C A + \int_C dX = \int_C A + \underbrace{\int_{\partial C} X}_{\text{closed}} = \int_C A + 0$$

2017. 10. 4()

さらに、時間変動する B を考えよう

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -\text{rot } E$$

微分形式で書くと $\frac{\partial B}{\partial t} = -dE$

か、外部に回路がある

(起電力の増減に応じて電流が流れる仕事

$$W = + \int_{t_1}^{t_2} dt I \int_C E$$

$$= + \int_{t_1}^{t_2} dt I \int_{\partial S} E = + I \int_{t_1}^{t_2} dt \int_S dE$$

$$= I \int_{t_1}^{t_2} dt \int_S \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$= -I \int_S B(t_2) + I \int_S B(t_1)$$

$$= -I \int_C A(t_2) + I \int_C A(t_1)$$

$$= U(C, t_2) - U(C, t_1)$$

2017. 10. 4 ()

まとめ

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{点電荷の位置エネルギー} \\ \text{環電流の} \end{array} \right. \quad U^{(x)} = e\varphi(x)$$

$$U(c) = -I \int_c A$$

一般化 ↓

$$\left(\begin{array}{c} \text{電荷・電流分布系のエネルギー} \\ \rho \quad j \end{array} \right. \quad U = \int_V (\underbrace{\rho \varphi}_{\substack{\uparrow \\ \text{0-form}}} - \underbrace{j \wedge A}_{\substack{\uparrow \\ \text{1-form}}})$$

\swarrow twisted 3-form \swarrow twisted 2-form

$$= \int_V (\rho \varphi - \mathbf{j} \cdot \mathbf{A}) dxdydz \quad \mathbf{r} \in \mathbb{R}^n.$$

もう一度点電荷に戻ると、

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N e_i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad \mathbf{j}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N e_i \mathbf{v}_i \delta^3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$$

$$U = \sum_i e_i \varphi(\mathbf{r}_i) - \sum_i e_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{A}_i$$

$$\text{ラグランジアン} \quad L = \frac{1}{2} m v^2 - e\varphi + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} \quad \text{を正置化.}$$

課題

non-Abelian gauge field の拡張.

2017. 10 4 ()

$p = mv + eA$ の“自然”な解釈はあるか？

mv は “ゲージ” 不変だから

p には “ゲージ” 不変性がない： $p \rightarrow p + e \text{grad} \chi$

p の物理的意味は考之に“~~い~~”...

だいたい、磁ー様磁場であ、ても p は保存量ではない。

1) 解析力学的定義をそのまま採用する： $p = \frac{\partial L}{\partial v} = mv + eA$
 という立場。

L の不変性 $L \rightarrow L' = L + e \frac{d\chi}{dt}$ から、そのまま p の不変性にうつりかざる。
 (“ゲージ”変換)

2) $e\varphi$ が “位置エネルギー” であるから、 eA は “位置運動量” を表しているのだ” という解釈

Konopinski (1978)

外場

$E_{ex}(r) = -\text{grad} \varphi$

考之、電場のエネルギー $W = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int E \cdot E d^3r$

$E = E_{ex} + E_q$ $E_q(r) = \frac{q(r-r_q)}{4\pi\epsilon_0|r-r_q|^3}$

$$= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int (E_{ex}^2 + 2 \underbrace{E_{ex} \cdot E_q}_U + E_q^2) d^3r$$

$$U = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{2 \cdot q}{4\pi\epsilon_0} \int \left(+ \frac{r-r_q}{4\pi|r-r_q|^3} \right) \cdot (q r - \text{grad} \varphi) d^3r$$

$$= q \int + \text{div} \left(\frac{r-r_q}{4\pi|r-r_q|^3} \right) \varphi d^3r \quad \downarrow \text{部分積分}$$

$$= q \int \delta^3(r-r_q) \varphi(r) d^3r$$

今井功
電磁場と量子力学, P. 167

$g = D \times B$

電磁場の運動量 $G = \epsilon_0 \int (E \times B) d^3r$

$$= q \varphi(r_q)$$

$$E = E_q = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r-r_q}{|r-r_q|^3}$$

$$B = B_{ex} = \nabla \times A \quad A(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j}{|r-r_q|}$$

$$= \frac{q}{4\pi} \int \left(\frac{r-r_q}{|r-r_q|^3} \right) \times (\nabla \times A)$$

$$= \frac{q}{4\pi} \int -\nabla \cdot \left(\frac{r-r_q}{|r-r_q|^3} \right) A$$

$$\text{荷電粒子に} \quad = -q \int \delta(r-r_q) A(r) d^3r = -q A(r_q)$$

3) eA は たま、この力積

4) したがって (p は symplectic structure から出て来るという) 考之： Marsden-Weinstein reduction

2017. 10. 5 ()

3) eA は荷電粒子にたまわりの力積

Barbieri, Carinato, Giliiberti (2013)

$$\text{たまわりの力積} \quad q = - \int_{-\infty}^t q E(r, t') dt' = + q \int_{-\infty}^t \frac{\partial A}{\partial t'} dt' = q A(r, t)$$

$$E = -\text{grad} \varphi - \frac{e}{c} \frac{\partial A}{\partial t} \quad \text{if } \varphi = 0 \text{ e.g.}$$

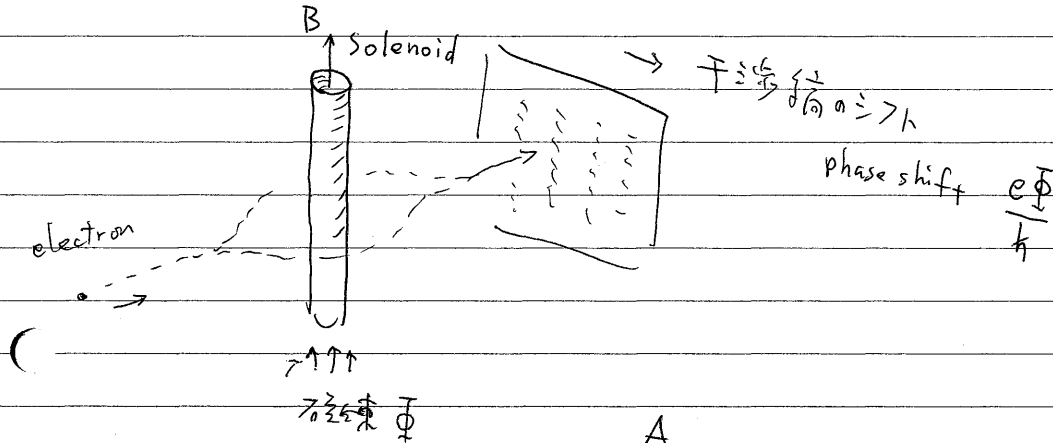
4) p, A is symplectic structure (by 33)

Marsden-Weinstein reduction

2017. 10. 5

Aharonov-Bohm 効果は vector potential を使った説明ができる。 L. Vaidman (2012)

IB と entanglement が A-B 効果の本質。



通常の説明

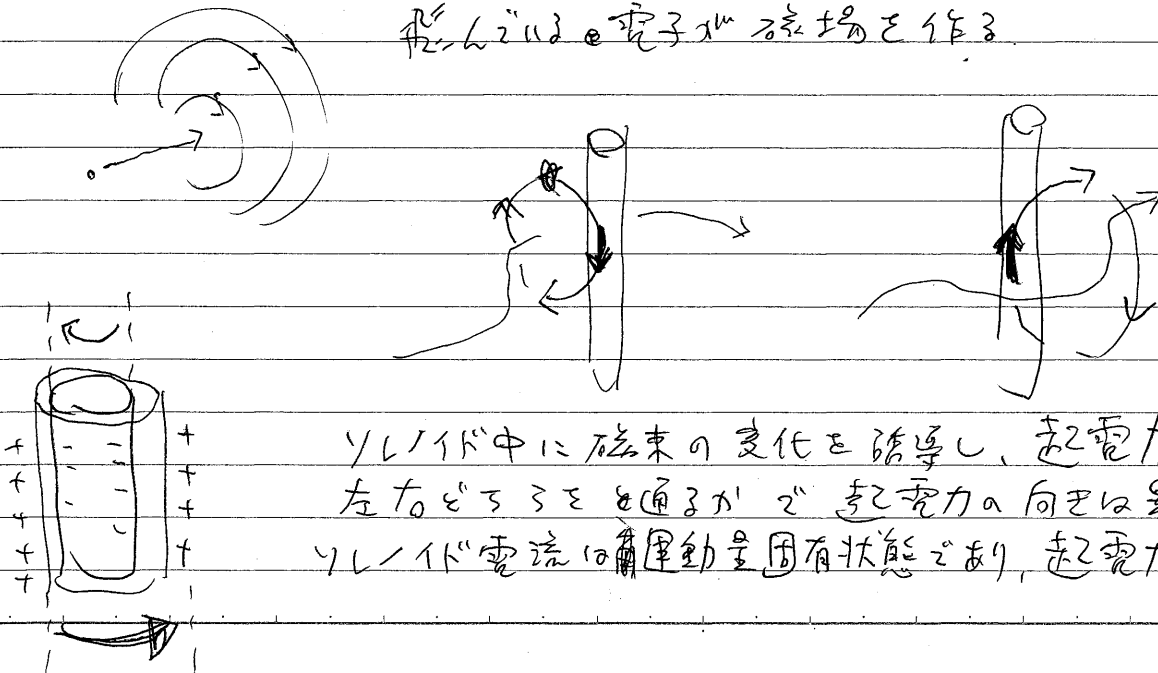
$$|\psi\rangle = |L\rangle + |R\rangle \rightarrow |\psi'\rangle = e^{\frac{ie}{\hbar} \int_L A \cdot dr} |L\rangle + e^{\frac{ie}{\hbar} \int_R A \cdot dr} |R\rangle$$

phase difference

$$\theta = \frac{e}{\hbar} \left(\int_L A \cdot dr - \int_R A \cdot dr \right) = \frac{e}{\hbar} \oint A \cdot dr = \frac{e}{\hbar} \int B \cdot dS$$

Vaidman の説明

磁場の存在は電子が磁場を作る。



ソレノイド中に磁束の変化を誘導し、起電力を生じせしめる。

左のどちらを通るかで起電力の向きは異なる。

ソレノイド電流は運動量固有状態であり、起電力は電場のシフト

波動関数と相互作用

$$|electron\rangle \otimes |solenoid\rangle$$

$$|e\rangle \otimes |s\rangle$$

$$|L\rangle_e \otimes |P\rangle_s$$

$$(|L\rangle_e + |R\rangle_e) \otimes |P\rangle_s$$

$$\rightarrow e^{ip\delta x} |L\rangle_e |P\rangle_s + e^{-ip\delta x} |R\rangle_e |P\rangle_s$$

$$= (e^{ip\delta x} |L\rangle_e + e^{-ip\delta x} |R\rangle_e) \otimes |P\rangle_s$$

11. $T=L$ is
entangled
アミガタはアミガタ
2つのアミガタ
"a2"

$2p\delta x$ is A-B phase is $\frac{2\pi}{\lambda}$.

Vaidman's argument

LLL

$$|L\rangle_e |L\rangle_s + |R\rangle_e |R\rangle_s$$

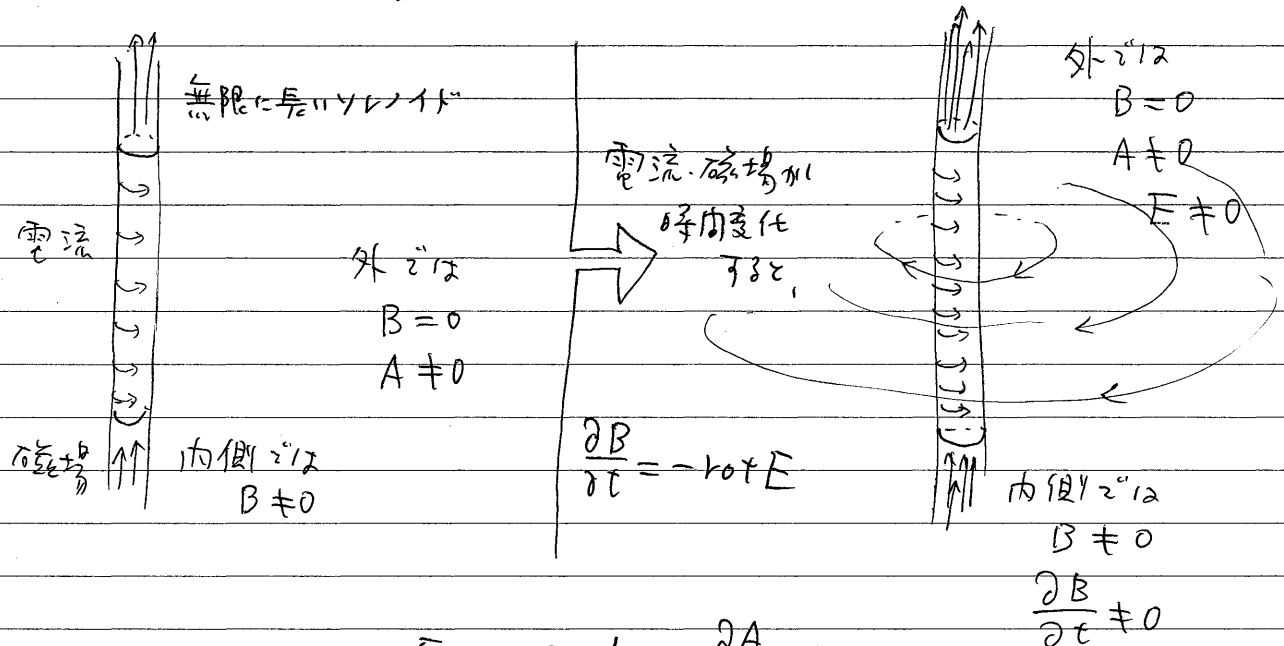
$|L\rangle_s$ & $|R\rangle_s$ is "directly" interference.

後日作成XZ.

2017.10.17()

私の発表のあと、

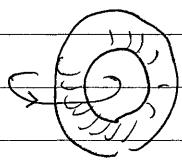
北野先生と小芦先生がこんな議論をされたとき、北野先生から教えていただきました。



$$E = -\text{grad } \varphi - \frac{\partial A}{\partial t}$$

↑この項が効いている。

有限長のソレノイドを考えると、外への磁場のモメントはあり。



ソレノイドを閉じたトラスにすると磁場のモメントはゼロでも外部に起電力を生じる。

といて、 $B=0$ の場所でも電磁誘導により $E \neq 0$ を生じることはある。

古典電磁気学でもこんな現象があるという話でした。