国際単位系 (SI) の 2018 年改訂と電磁気学の見直し — さらば $4\pi \times 10^{-7}$

北野正雄

京都大学工学研究科

2017.10.7–8 第 7 回 QUATUO 研究会
(Phoquet Chapter in Hokkaido)
北海道大学

なぜ単位系に拘るのか

- 学生時代 — Gauss 単位系から, MKSA 単位系への移行期
  教養のテキストは Gauss, 専門科目（工学部）では MKSA
  ２つの単位系併記のテキスト（学習意欲喪失）
- 現在 — 見かけ上は SI に収束, but
  - Gauss 単位系に固執する人たち　(根拠なき優越感)
  - D, H 不要論や過度の EB 対応
  - 悪い影響を与える教科書: Griffiths, 太田, Feynman, . . .
- 依然として、電磁気学は混乱状態

誤解 (1)

- ローレンツ力が E、B で表されるのだから、当然 E、B が基本である
- D と H は電磁場的な量と物質的な量の組み合わせに過ぎず、便宜的なものである。補助場と呼ぶのが相応しい。
- H は磁荷や磁極に付随する量なので、できるだけ使わないのがよい。教えることも控えた方がよい。
- B を磁束密度と呼ぶのは物理的におかしい。
- 真空の誘電率、真空の透磁率は SI 単位系における辻褄合わせの定数であり、物理的なものではない。
- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ と単位をさりげなく省略する。

誤解 (2)

- 誘電体でも磁性体でもない真空に、ゼロでない誘電率や透磁率を持たせる SI 単位系は変である。（Gauss 単位系でもゼロではないのだけれど？）
- 真空中で 2 種類の電場、磁場を考えるなんてどうかしている。
- 電磁気学は本来 Gauss 単位系で記述されるべきであるが、慣習的に SI が使われているので、仕方なくそれにしたがう。
- マクスウェル方程式に c が表れるので、Gauss 単位系が優れている。
- 本来、E と B は同じ単位で測られるべきである。別の単位で測るのは、東西の距離と南北の距離を別の単位で測るようなものである。
- 相対論で使われるテンソルは E、cB で表されるので、E、B が基本である。
- ポテンシャル ϕ、A の微分である E、B が基本である。

電磁気への疑問

- なぜ単位系が沢山あるのか？　SI かガウスか？
- 磁場ってなに？
- E, D, B, H の役割は？
- 真空の誘電率、透磁率は何のために？
- なぜ $4\pi \times 10^{-7}$ か？
- 物理的次元の定義は？

佐藤文隆先生の単位本

- 物理的考察や文明論など示唆に富んだモノグラフ
  — ありがちな規格書の解説ではない
- 理論家らしからぬ、実験や工学への深い理解
  — 2018 年の SI 改訂を予感させる内容
- ただし、電磁気の単位系部分に難あり
- 2018 年改訂を踏まえて新版を準備中 (電磁気パートは北野が担当)

「電子質量を kg で表す気がしれない！」???

2018 年の SI 改訂

- the unperturbed ground state hyperfine splitting frequency of the caesium 133 atom $\Delta\nu_{\mathsf{Cs}}$ is $9\,192\,631\,770\,\mathrm{Hz}$,
- the speed of light in vacuum c_0 is $299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$,
- the Planck constant h is $6.626\,070\,040 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$,
- the elemetary charge e is $1.602\,176\,620\,8 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$,
- the Boltzmann constat k_{B} is $1.380\,648\,52 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}$,
- the Avogadro constant N_{A} is $6.022\,140\,857 \times 10^{23}\,\mathrm{mol}^{-1}$,
- the luminous efficacy K_{cd} of monochromatic radiation of frequency $540 \times 10^{12}\,\mathrm{hertz}$ is $683\,\mathrm{lm/W}$.

メートル m の変遷

- 地球の子午線の長さ
- メートル原器 (1879)
- クリプトンランプ (1960)
- 光速 c_0 の定義値化 (1983) $c_0 \overset{\mathsf{SI}}{\sim} \mathrm{m}/\mathrm{s}$

キログラム kg の変遷

- 水の質量
- キログラム原器 (1889)
- プランク定数 h の定義値化 (2018) $h \overset{\text{SI}}{\sim} \mathrm{J\,s} = \mathrm{kg\,m^2\,s^{-1}}$

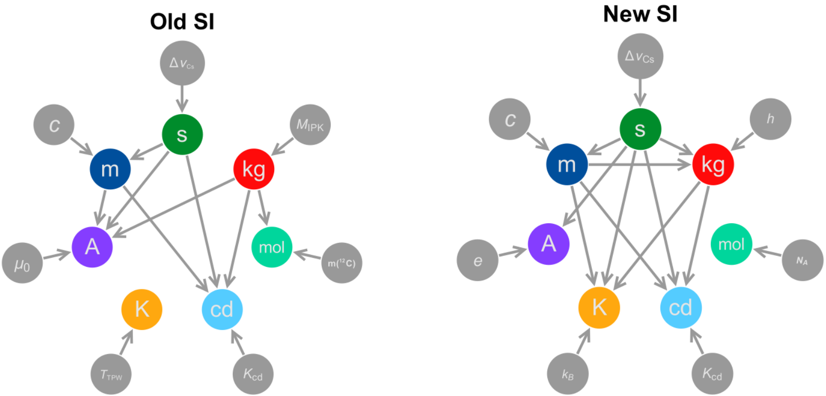
秒 s の変遷

- 地球の自転
- 地球の公転 (1956)
- セシウム原子時計 (1967) $\Delta\nu_{\mathrm{Cs}} \overset{\mathrm{SI}}{\sim} 1/\mathrm{s}$

アンペア A の変遷

- CGS emu を用いて定義 (1881)　$1\,\mathrm{A} \leftrightarrow 0.1\,\mathrm{emu}$
- 真空透磁率 μ_0 の定義値化 (1954) $\mu_0 \overset{\text{SI}}{\sim} \mathrm{N}/\mathrm{A}^2$
- 素電荷 e の定義値化 (2018) $e \overset{\text{SI}}{\sim} \mathrm{A\,s}$

旧 SI vs 新 SI



by Wikipedia

$4\pi \times 10^{-7}$ の起源

1870 年ごろ

- 実用単位　— 標準電池, 標準抵抗 (当時は再現性に難あり)
- 絶対単位　— CGS emu, CGS esu (力を基準に電流、電荷を測る)
- 両者の折衷 — 絶対化実用単位
  1 ボルト $\leftrightarrow 10^8\,\mathrm{emu}$,　　1 オーム $\leftrightarrow 10^9\,\mathrm{emu}$
  偶然の一致. 多少のズレは無視して丸めた.
- 第 1 回国際電気会議 (1881)
  新たに電流の単位としてアンペアを定義　1 アンペア　$\leftrightarrow 0.1\,\mathrm{emu}$
- 7th CGPM (1948)
  SI の単位として承認　$\mu_0 = 4 \times 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$

$4\pi \times 10^{-7}$ の起源

- d だけ離れた平行電流の長さ l の部分に働く力

$$F = 2\,\frac{l}{d}\,I_{\mathsf{emu}}^2 \qquad (\mathsf{CGS\ emu})$$

$$F = \frac{\mu_0}{2\pi}\,\frac{l}{d}\,I_{\mathsf{SI}}^2 \qquad (\mathsf{SI})$$

- $I_{\mathsf{emu}} = 0.1\,\mathrm{emu}$, $d = l\ (= 1\,\mathrm{cm})$ を CGS emu の式に代入

$$F = 2 \times (0.1\,\mathrm{emu})^2 = 2 \times 10^{-2}\,\mathrm{dyn} = 2 \times 10^{-7}\,\mathrm{N}$$

- SI の式に代入

$$2 \times 10^{-7}\,\mathrm{N} = \frac{\mu_0}{2\pi}(1\,\mathrm{A})^2$$

これより,

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A^2}$$

SI に対する批判

Gauss 愛好家から

- kg, m が大きすぎる. (八つ当たり？)
- 真空なのに $\varepsilon_0 \neq 1$, $\mu_0 \neq 1$. (真空は分極しない !?)
- 真空なのに $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{H}$ がある. (補助場扱い)
- 工学で決めたことでしょ.
- $4\pi \times 10^{-7}$, 訳がわからない。

電磁気の 4 定数

- 誘電率 $\varepsilon_0 \stackrel{\mathsf{SI}}{\sim} \mathrm{S\,s/m}$
- 透磁率 $\mu_0 \stackrel{\mathsf{SI}}{\sim} \Omega\,\mathrm{s/m}$
- 光速 $c_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0} \stackrel{\mathsf{SI}}{\sim} \mathrm{m/s}$
- インピーダンス $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0} \stackrel{\mathsf{SI}}{\sim} \Omega$

時空構造定数

c_0

電気定数 ε_0 $+$ μ_0 磁気定数

Z_0

電磁構造定数

定義値の変遷

	(1948) $\rightarrow$	(1983) $\rightarrow$	(2018) $\rightarrow$
ε_0	—	$1/(c_0^2\mu_0)$	—
μ_0	$4\pi\times 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$	$4\pi\times 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$	—
c_0	—	$299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$	$299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$
Z_0	—	$c_0\mu_0$	—

電磁気には特別の単位は要らない

電流 A	電圧 V
パワー $\mathrm{W} = \mathrm{A\,V}$	
コンダクタンス $\mathrm{S} = \mathrm{A/V}$ 抵抗 $\Omega = \mathrm{V/A} = \mathrm{Wb/C}$	

電荷 (電束) $\mathrm{C} = \mathrm{A\,s}$	磁束 (磁荷) $\mathrm{Wb} = \mathrm{V\,s}$
エネルギー $\mathrm{J} = \mathrm{C\,V} = \mathrm{A\,Wb}$ 作用 $\mathrm{J\,s} = \mathrm{C\,Wb}$	
キャパシタンス $\mathrm{F} = \mathrm{C/V} = \mathrm{S\,s}$ インダクタンス $\mathrm{H} = \mathrm{Wb/A} = \Omega\,\mathrm{s}$	

- 電気回路と力学の単位で十分
- テスラ T は過剰

単位系と圏論

- 第 1 回 QUATUO 研究会 (2012) 「単位系の擬順序構造と次元解析」

  MK, “Mathematical Structure of Unit Systems”, J. Math. Phys. **54**, 052901 (2013)
- 圏論とかなり相性がよさそう
  - Poset, Preset
  - free functor, forgetful functor (adjoint)
  - unversal mapping property

圏論

- 対象 (objects) $A, B, C, \ldots$
- 射 (arrows) $f, g, h, \ldots$

  $f : A \to B$, $\ldots$
- 射の合成　$f : A \to B$, $g : B \to C$ に対して

  $g \circ f : A \to C$
- 各対象 A に対して恒等射 $1_A : A \to A$

  すべての $f : A \to B$ に対して $1_A \circ f = f = f \circ 1_B$
- 合成則　$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[loop left, "1_A"] \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & B \arrow[loop above, "1_B"] \arrow[d, "g"] \\
 & C \arrow[loop right, "1_C"]
\end{tikzcd}
$$

単位系の基礎

単位系は量の整理学 — 単なる単位の集まりではない

- 基本単位 (base) と組立単位 (derived)
  - 少数 (N 個) の単位を基本単位として選定.
  - 他の単位は基本単位の積・商・冪.
  - N-元単位系
- 一貫した単位系 (coherent)
  - 1 以外の変換係数が表れない
  - 実用上重要
- 有理単位系 (rational)
  - 方程式に球因子 4π が表れない. (点対称解には 4π, 線対称解には 2π が表れる.)

単位系（電磁気）の例

- MKSA 単位系 (SI)
  4 元, 有理
- CGS emu (electomagnetic unit)
  3 元, 非有理, $\mu_0 = 1$
- CGS esu (electrostatic unit)
  3 元, 非有理, $\varepsilon_0 = 1$
- CGS Gauss (by Heaviside and Hertz)
  3 元, 非有理, (単位系もどき), $\mu_0 = \varepsilon_0 = 1$
- Heaviside-Lorentz 単位系
  有理化 Gauss 単位系

ここで扱う単位系

系統的な比較を行うために, 次のような単位系を導入する. すべて有理化.
ガウス単位系はさらに修正.

- 有理化 CGS esu　(rCGS-esu)
- 有理化 CGS emu　(rCGS-emu)
- 修正 有理化 CGS gauss　(mrCGS-Gauss)
  修正 Heaviside-Lorentz 単位系 (mHL)
- MKSCA 単位系 (5 元)
- MKSCAA' 単位系 (6 元)

量の集合 Ω

単位や単位系は量の表現手段である．表現の対象となる量全体を次のように定義しておく．

- 量の集合 Ω
  - スカラー倍
    任意の $Q \in \Omega$, $c \in \mathbb{R}$ について $cQ \in \Omega$.
  - 積, 冪
    任意の $P, Q(\neq 0) \in \Omega$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ に対して, $P^\alpha Q^\beta \in \Omega$.
    かけ算, 割り算は自由にできる
  - 和
    Q_1, Q_2 に対して, $c \in \mathbb{R}$ が存在して $Q_2 = cQ_1$ と表されるとき, 和を $Q_1 + Q_2 = (1 + c)Q_1$ と定義する．Q_1, Q_2 は Ω において可加算 (Ω-addible) であるとよぶ.
    スカラー倍の関係にある量しか足せない

単位系による量の表現

- 単位系 U における量 Q の表現

$$\mathcal{U} : (Q \in \varOmega) \mapsto \left(Q_U = q_U \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}} \in \varOmega_U \right)$$

ここで $q_U = \{Q\}_U \in \mathbb{R}$ は係数 (数値), $\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}} = [Q]_U$ は単位を表す.
$\boldsymbol{u}$: 基本単位の集まり, $\boldsymbol{d}$: 次元

- $\varOmega_U \sim \mathbb{R} \times \mathbb{Q}^N$ なので,

$$\mathcal{U} : (Q \in \varOmega) \mapsto \left((q_U, \boldsymbol{d}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Q}^N \right)$$

と見なすこともできる.

- 通常, 物理量と呼んでいるものは, 表現 Q_U であり, 量 Q そのものではない.

$\mathcal{U}$ の性質 (1)

写像 $\mathcal{U}$ は次の性質を満たす.

- 任意の $Q \in \varOmega$, 任意の $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathcal{U}(cQ) = c\,\mathcal{U}(Q) = (c\,q_U)\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}}.$$

- $(0 \neq)$ $Q, P \in \varOmega$ が $\mathcal{U}(Q) = q_U \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}}$, $\mathcal{U}(P) = p_U \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{b}}$ と表現されるとき, 量 $Q^\alpha P^\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ は

$$\mathcal{U}(Q^\alpha P^\beta) = \mathcal{U}(Q)^\alpha \mathcal{U}(P)^\beta = (q_U^\alpha p_U^\beta)\boldsymbol{u}^{\alpha\boldsymbol{d}+\beta\boldsymbol{b}}.$$

と表現される. ここで $\boldsymbol{u}^{\alpha\boldsymbol{d}+\beta\boldsymbol{b}}$ は量 $Q^\alpha P^\beta$ を測る単位 (組立単位).

$\mathcal{U}$ の性質 (2)

- Q_1, Q_2 が Ω において可加算のとき, Q_1 と Q_2 は同じ次元 $\boldsymbol{d}$ で表現され,

$$\mathcal{U}(Q_1 + Q_2) = \mathcal{U}(Q_1) + \mathcal{U}(Q_2) = (q_{1U} + q_{2U})\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}}$$

- Q と P が Ω において可加算でなくても, 同じ次元 $\boldsymbol{d}$ で表現されることがある. この場合は, $Q + P$ は定義されないにもかかわらず,

$$\mathcal{U}(Q) + \mathcal{U}(P) = Q_U + P_U = (q_U + p_U)\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}}$$

  である. このとき, Q と P は単位系 U において可加算 (U-addible) であるという.

- 可加算性は単位系に依存する性質である.

$\mathcal{U}$ の性質 (3)

- $\mathcal{U}$ を上射であると仮定する．つまり，任意の $q \in \mathbb{R}$，任意の $\boldsymbol{d} \in \mathbb{Q}^N$ に対して，$\mathcal{U}(Q) = q\boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}}$ を満たす $Q \in \Omega$ が少なくとも 1 つ存在するものとする．
- 単位系 $U = (\boldsymbol{u}, \mathcal{U})$ は基本単位の組 $\boldsymbol{u}$ と写像 $\mathcal{U} : \Omega \to \mathbb{R} \times \mathbb{Q}^N$ によって特徴づけられる．
- 基本単位の数が N の単位系は N-元単位系と呼ばれる: $N =: \#(U)$.

順序構造

順序構造 (1) — 全順序

- 次の性質をもつ 2 項関係 $\geq$ を備えた集合 X を全順序集合という.
- 任意の $a, b, c \in X$ に対して
  - (完全関係) $a \geq b$ または $b \geq a$,
  - (反対称律) $a \geq b$, $b \geq a$ なら $a = b$,
  - (推移律) $a \geq b$, $b \geq c$ なら $a \geq c$,
  - (反射律) $a \geq a$,
- 整列可能
- (例) 数の大小関係

順序構造 (2) — 部分順序

- 次の性質をもつ 2 項関係 $\geq$ を備えた集合 X を部分順序集合 (Partially ordered set, POSET) という.
- 任意の $a, b, c \in X$ に対して
  - (反対称律) $a \geq b$, $b \geq a$ なら $a = b$,
  - (推移律) $a \geq b$, $b \geq c$ なら $a \geq c$,
  - (反射律) $a \geq a$,
- 比較できない場合がある
- (例) 集合の包含関係

順序構造 (3) — 擬順序

- 次の性質をもつ 2 項関係 $\geq$ を備えた集合 X を擬順序集合 (pre-ordered set) という.
- 任意の $a, b, c \in X$ に対して
  - (推移律) $a \geq b$, $b \geq c$ なら $a \geq c$,
  - (反射律) $a \geq a$,
- $a \neq b$ でも, $a \geq b$ と $b \geq a$ が同時に成り立つ場合がある
- (例) 世代の比較
- 同値関係 ($a \geq b$ かつ $b \geq a$) で X をクラス分けすれば, 部分順序が得られる.

U において等しい量

- 2 つの量 $Q, P \in \Omega$ について $\mathcal{U}(Q) = \mathcal{U}(P)$ が成り立つとき, $Q \overset{U}{=} P$ と書くことにする.
- すなわち, $\mathcal{U}(Q) = q_U \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{d}}$, $\mathcal{U}(P) = p_U \boldsymbol{u}^{\boldsymbol{b}}$ に対して, $q_U = p_U$ かつ $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{b}$
- 当然のことながら, $Q = P$ なら $Q \overset{U}{=} P$.
- しかし, 逆はかならずしも成り立たない.

関係 $\overset{U}{=}$ は同値関係

- 関係 "$\overset{U}{=}$" は Ω における同値関係を与える.
- 任意の $Q, Q', Q'' \in \Omega$ について
  - (対称律) $Q \overset{U}{=} Q'$ なら $Q' \overset{U}{=} Q$,
  - (反射律) $Q \overset{U}{=} Q$,
  - (推移律) $Q \overset{U}{=} Q'$ かつ $Q' \overset{U}{=} Q''$ なら $Q' \overset{U}{=} Q''$.
- この同値関係をつかって Ω をクラス分けすることができる.

単位系間の移行可能性

- 2 つの単位系 U, V を考える. $N = \#(U)$, $M = \#(V)$.
- 任意の量 $Q, P \in \Omega$ に対して

$$(Q \overset{U}{=} P) \Rightarrow (Q \overset{V}{=} P)$$

  が成り立つとき,

$$U \succsim V$$

- U で等しいと見なされる量は V で必ず等しいと見なされる.
  逆に, V で区別される量は必ず U でも区別される.
- 単位系 U は V に移行可能 (transferable) であると呼ぶことにする.
- $N \geq M$

単位系の擬順序

- 単位系間の移行可能関係 “$\succsim$” は擬順序の公理を満たす.
- 任意の単位系 U, U', U'' について
  - $U \succsim U$,
  - $U \succsim U'$ かつ $U' \succsim U''$ なら, $U \succsim U''$.
- この順序構造を使って, 単位系を樹状図や家系図のように整理することができる.

単位系の間の関係

- $U \succsim V$ かつ $U \precsim V$ のとき, すなわち, U と V が相互に移行可能なとき, $U \sim V$ と表し, U と V を等価である (equivalent) と呼ぶ.
  $N = M$ である.
- $U \succsim V$ も $U \precsim V$ も成り立たない場合, すなわち, U と V がどちら側からも移行できない場合, $U \parallel V$ と表し, U と V は両立しない (incomparable) とよぶ.
- $U \succsim V$ かつ $V \not\succsim U$ の場合, $U \succ V$ と書く.

単位系の間の関係のまとめ

- 関係をまとめると

	$U \precsim V$	$U \not\precsim V$
$U \succsim V$	$U \sim V\ (N = M)$	$U \succ V\ (N > M)$
$U \not\succsim V$	$U \prec V\ (N < M)$	$U \parallel V\ (N <=> M)$

$N = \#(U)$, $M = \#(V)$.

単位系間の写像 $\mathcal{T}$

単位系による表現間の写像 (1)

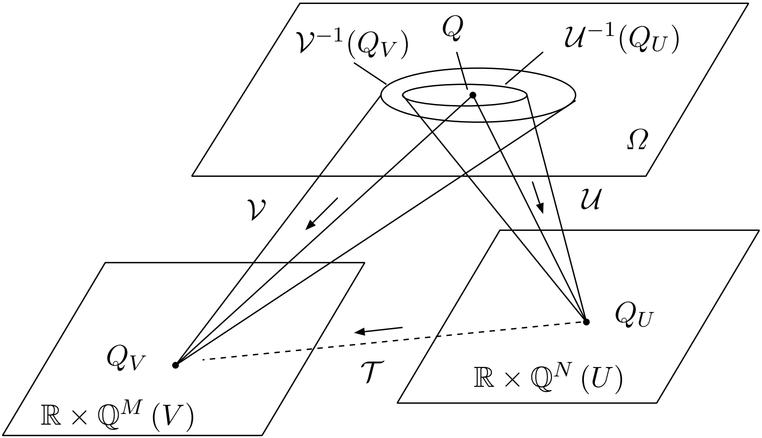
$U \succsim V$ の場合に限り, $U = (\boldsymbol{u}, \mathcal{U})$ による表現から $V = (\boldsymbol{v}, \mathcal{V})$ による表現への写像 $\mathcal{T} : Q_U \mapsto Q_V$ が存在することを示す.

- まず, U における表現 Q_U を選ぶ. $\mathcal{U}$ が全射なので, 空でない逆像 $\mathcal{U}^{-1}(Q_U) \subset \Omega$ が存在.
- この逆像から量 Q を選び, それを $\mathcal{V}$ で写して Q_V を得る. $U \succsim V$ なので, $\mathcal{V}^{-1}(Q_V) \supseteq \mathcal{U}^{-1}(Q_U)$.
- したがって, Q_U から $Q_V = \mathcal{V}(\mathcal{U}^{-1}(Q_U))$ を一意に定めることができる.
- このようにして, 写像が得られる.

$$\mathcal{T} : \Omega_U \to \Omega_V, \quad \text{あるいは,} \quad \mathbb{R} \times \mathbb{Q}^N \to \mathbb{R} \times \mathbb{Q}^M$$

- $U \sim V$ の場合, 逆向きの写像も存在するので $\mathcal{T}$ は可逆 (1 対 1).
- $U \parallel V$ の場合は写像が存在しない, つまり単位系の変換はできない.

単位系による表現間の写像 (2)



6 元単位系　MKSCAA'

- 電荷の単位 C　と電流の単位 A を独立にとり、さらにもう一つの電流の単位 A′ を設定

$$\gamma = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{A\,s}}, \quad \alpha = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A'}}$$

- 単位毎に量を分類

$$S_{\mathsf{C}} = \{q, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{P}, \varrho\}, \quad F_{\mathsf{C}} = \{\phi, \boldsymbol{E}\},$$
$$S_{\mathsf{A}} = \{\boldsymbol{H}, \boldsymbol{M}\}, \quad F_{\mathsf{A}} = \{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}\}, \qquad S_{\mathsf{A'}} = \{\boldsymbol{I}, \boldsymbol{J}\}$$

ただし, $[S_{\mathsf{C}}] = [F_{\mathsf{C}}]^{-1} = \mathrm{C}$, $[S_{\mathsf{A}}] = [F_{\mathsf{A}}]^{-1} = \mathrm{A}$, $[S_{\mathsf{A'}}] = \mathrm{A'}$.

MKSCAA' 系の方程式

- ローレンツ力　$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E} + \gamma^{-1} q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{f} = \varrho\boldsymbol{E} + \alpha\boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B}$
- Maxwell 方程式

$$\mathrm{curl}\,\boldsymbol{E} = -\frac{1}{\gamma}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{B} = 0,$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{D} = \varrho, \quad \mathrm{curl}\,\boldsymbol{H} = \frac{1}{\gamma}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} + \alpha\boldsymbol{J}$$

- 構成方程式

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{H} = \mu_0^{-1}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{M}$$

- 電荷保存

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{J} + \frac{1}{\alpha\gamma}\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$$

- 波動方程式から拘束条件として光速の式　$c_0 = \dfrac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}}$

MKSCAA' から MKSA

- ６元単位系に対して正規化

$$\tilde{S}_{\mathrm{C}} = \gamma^{-1} S_{\mathrm{C}}, \quad \tilde{F}_{\mathrm{C}} = \gamma F_{\mathrm{C}}, \quad \tilde{S}_{\mathrm{A'}} = \alpha S_{\mathrm{A'}}$$

を施すと, MKSA が得られる.

$$\tilde{\gamma} = \tilde{\alpha} = 1$$

- 6 元単位系に対して正規化

$$\hat{S}_{\mathrm{C}} = S_{\mathrm{C}}/\sqrt{\varepsilon_0}, \quad \hat{F}_{\mathrm{C}} = \sqrt{\varepsilon_0} F_{\mathrm{C}},$$
$$\hat{S}_{\mathrm{A}} = \sqrt{\mu_0} S_{\mathrm{A}}, \quad \hat{F}_{\mathrm{A}} = F_{\mathrm{A}}/\sqrt{\mu_0}$$
$$\hat{S}_{\mathrm{A'}} = \frac{\alpha\gamma}{\sqrt{\varepsilon_0}} S_{\mathrm{A'}}$$

を行うと, Lorentz-Heaviside が得られる:

$$\hat{\varepsilon}_0 = \hat{\mu}_0 = \hat{\alpha}\hat{\gamma} = 1$$

単位系間の関係

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & (\text{MKSCAA'}) \arrow[d, "\alpha"] \arrow[ddll, "{\mu_0, \varepsilon_0, \gamma\alpha}"'] & & & N=6 \\
 & & (\text{MKSCA}) \arrow[dl, "{\mu_0, \varepsilon_0}"'] \arrow[dr, "\gamma"] & & & N=5 \\
 & & (\text{MSVA}) \arrow[d, "\mu_0"'] & (\text{MKSA}) \arrow[d, "\varepsilon_0"] & (\text{MKS}\Omega) \arrow[d, "Z_0"] & N=4 \\
(\text{HL}) \arrow[d, "\gamma/\alpha"'] & (\text{mHL}) \arrow[d, "c_0"'] & (\text{r-emu}) \arrow[d, "\varepsilon_0"'] & (\text{r-esu}) \arrow[d, "\mu_0"] & (\text{MKSA}/Z_0) \arrow[d, "c_0"] & N=3 \\
(\text{mHL}/(\alpha/\gamma)) & (\text{mHL}/c_0) & (\text{r-emu}/\varepsilon_0) & (\text{r-esu}/\mu_0) & (\text{MKSA}/Z_0/c_0) & N=2
\end{tikzcd}
$$

- 矢印は “$\succ$” に対応する．点線の箱は EUS を表す．

まとめ

- 定義 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$ は廃止される.
- μ_0, ε_0 はどちらも測定によって決まる量に.
- 教科書の書き換えが必要になる.
- ついでに、D, H の復権を.