第7回QUATUO研究会
2017年10月7日（土）@北海道大学

決定論的量子力学？
ボーム理論はどこまで行くか？

大阪大学基礎工学研究科

井元 信之

量子力学における測定の役割

論文が書けるテーマ　　・・・ 量子非破壊測定の方法提案、応用
論文が書きにくいテーマ・・・ いわゆる観測問題

量子非破壊測定・・・光Kerr効果を用いた光子数のQND測定（1985）
損失があるときのQND測定（1989）
QND的フォトンカウンティング

いわゆる観測問題・・・
［素朴な問題意識］測定過程はシュレーディンガー方程式ではなくノイマンの射影で記述されると言うが、測定器が絡むととたんにシュレーディンガー方程式で記述できないというのはおかしくないか？
［少し定式化］測定値を知っている場合はそれに対応する固有状態に波束が収縮する。測定値を知らない場合は ρ の対角化が起こる。これらをシュレーディンガー方程式で説明できないか？　できないからノイマンを使うというのでもよいが、どういう場合にどちらを使うべきか、条件を明確にして欲しい。

80年代ころまであった説
・「波束の収縮や ρ の対角化は、測定器を含んだ拡大 ρ のシュレーディンガー方程式で導ける」
・「測定結果が確率的に見えるのは測定器の初期状態がまちまちだから」
・エルゴード増幅派

→ Localな測定器の状態が被測定系の波束の収縮先にコミットする理論はダメ（と、当初から思った。）

→ どんな理論が生き残るか？　→ 多世界解釈とボーム理論

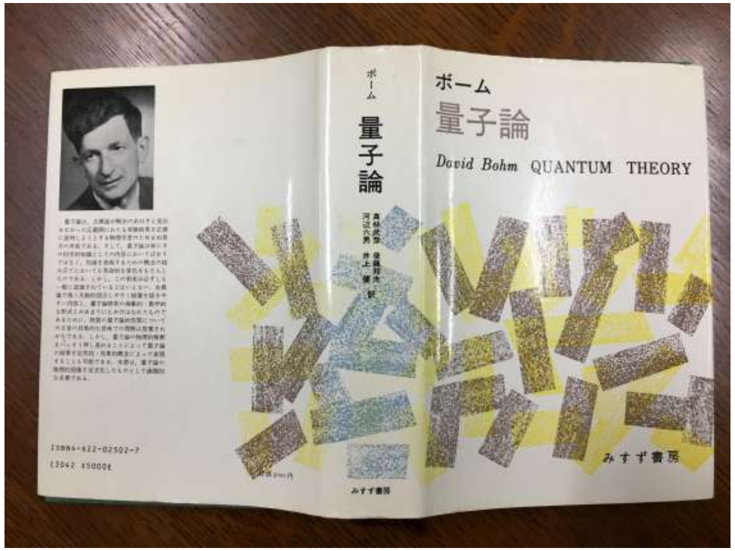
1990年にDavid DeutschとDavid Bohmにインタビュー

1990年にDavid DeutschとDavid Bohmにインタビュー

1990年にDavid DeutschとDavid Bohmにインタビュー

Deutsch：コテコテの多世界理論信奉者。量子チューリングマシンのアイデアはその直感から生まれた。

Bohm：私の生まれる１年前に名著「量子論」を執筆。これは全編コペンハーゲン解釈で書かれている。



と、本当に多世界が実在するということの間には距離がありますから。

ボーム解釈——すべてを古典力学の理論で考える

——量子力学の解釈では、コペンハーゲン解釈と多世界解釈のほかに「ボーム解釈」というものがありますね。ものごとは偶然ではなく、法則に従って動いていると信じている科学者たちをひきつけてきたように思うのですが。

ええ。米国の理論物理学者デイビッド・ボームが編み出した理論です。コペンハーゲン解釈と多世界解釈に比べればこのところあまり話題にのぼらなくなっていますが、ボーム解釈を一言でいうと「すべてを古典力学の理論で考えようとする解釈」というものです。

ボーム解釈で特徴的な点は「コペンハーゲン解釈における確率的なものの見方の裏には、その一見確率的に見える結果をきちんと説明づける、隠れた変数が存在する」とするところです。しかし、その変数を見抜く情報を現在の私たちはもち合わせていないので確率的に見えてしまうのだ、としています。EPR実験を思い出してください。ボーム解釈にたてば、AB二つの粒子の向きは、どこかに司令塔の役割を果たす未知の存在がいて、それ

によって、すべてを秩序に合うように決められている、というのです。

「隠れた変数」には二つあります。一つめはアインシュタインの相対論を満たすもの、二つめは相対論を満たさないものです。ボームの解釈は後者です。相対論を満たすほうの理論は、すでにお話しした「アスペの実験」(142ページ参照)によって否定されています。一方、相対論に反しているボームの理論のほうはいまも生きています。ボーム自身は一九九二年に他界してしまいましたが。

——後半生は、英国住まいでしたね。本当に残念なことに、私がロンドンへの赴任で渡英する直前に亡くなりました。井元さんは、ボームに会ったことがおありでしたね。

ええ、そうなのです。ボームに会ったとき、私は「『ボーム解釈』をご自身はどう考えているのか」と聞いたことがあります。

——ボームはなんと答えたのですか。

1990年にDavid DeutschとDavid Bohmにインタビュー

Deutsch：コテコテの多世界理論信奉者。量子チューリングマシンのアイデアはその直感から生まれた。

Bohm：私の生まれる１年前に名著「量子論」を執筆。これは完璧なコペンハーゲン解釈で書かれている。

しかし翌年、突如「Bohm理論」を発表！ （私の生まれた年）

ここで小さな告白

「この解釈は一つの仮説であって、私は正しいと言っているわけではない。科学というものは仮説を立てないと進歩しないだろう」と言っていました。

私自身は、他にもノーベル賞級の功績のあるボームのことをすごく尊敬しています。しかし、ボームの解釈は、あまり信じることができないというのが正直なところです。相対論を満たさないという点が受け入れられない。

——ボームとともに研究したバジル・ハイリーから聞いた話ですが、ボーム解釈では、それぞれの粒子に指示を与える「量子ポテンシャル」というようなものを想定するということでした。これが、相対論を満たさない隠れた変数の役目を果たすのでしょうか。だとするとこれは、時間を超越して世界全体を支配する神のような隠れた変数ということになりますね。

そうなのです。その神のような隠れた変数がもし本当にあるとすると、光速を超える速さの通信ができることになってしまいます。私が信じ難いと思うのは、この点です。ただ、ボーム解釈は、実験で確かめることができる。もし光速を超える情報伝達のしく

み、つまり相対論を破る変数が見つかれば正しい。逆にそういう結果が得られないならだめで、確率的な解釈と何も変わらないことになります。コペンハーゲン解釈は古典的に扱われるべき測定器（観測者）とは何かを定義していないので、検証のしようがありません。多世界解釈もこの実験をやればその正誤がわかる、というような提案をしにくそうなので、検証は難しそうです。この観点からはボームの理論は仮説として最も明確です。

多世界解釈の説得力

——コペンハーゲン解釈の「量子力学と古典力学が混在している世界」、多世界解釈の「すべてが量子力学で表される世界」、ボーム解釈の「すべてが古典力学で表される世界」。この三つの量子の世界の解釈について、それぞれ印象を語っていただきました。三つのうちのどれに分がある、とお考えですか。

少し言いましたように、今のところ実験結果からは、三つの解釈のどれがどれくらい正しいかということは言えません。それでも最近は多世界論者が増えているようで、それがなぜかと考えると、やはり一個一個の粒子の振る舞いを見ることができるようになってき

その後、私は「Bohmの理論」すなわち「非局所隠れた変数の理論」を「問答無用」とまで拒絶することはなくなった。

なぜか？

1926 Born：　$|\psi|^2$　・・・　観測値出現確率
1927 Einstein：「神がサイコロを振るとは信じられない」→　Bohr：「それが物理法則」
1935 Einstein-Podolsky-Rosen パラドクス ／ シュレーディンガーが “entanglement”命名

1952 Bohmの理論

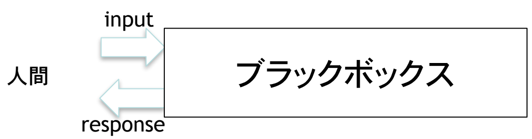
1954 Everett/De Witt の多世界解釈

1964 Bell不等式
　1969 CHSH不等式

Bell不等式検証実験（1972-1982）
　1972 Freedman and Clauser （Ca蒸気からのカスケード2光子発生）→ QMを支持
　1973 Holt and Pipkin （水銀）→ 古典論（局所実在論）を支持
　1976 Fry and Thompson （水銀）→ QMを支持
　などなど
　1982 Aspect, Grangier, and Roger （Ca＋偏光分離）→ QMを支持
　　Aspect, Dalibard, and Roger （Ca＋偏光＋Pockels Cell）→ QMを支持
　　　Communication Loopholeを解消

他にも種々。例：Duncan & Kleinpoppen 原子発光（1985-1986）等 → QMを支持
光子以外での実験：スピン（1976）、メソン（2003）→ いずれもQMを支持
Detection Loopholeの解消に向かって

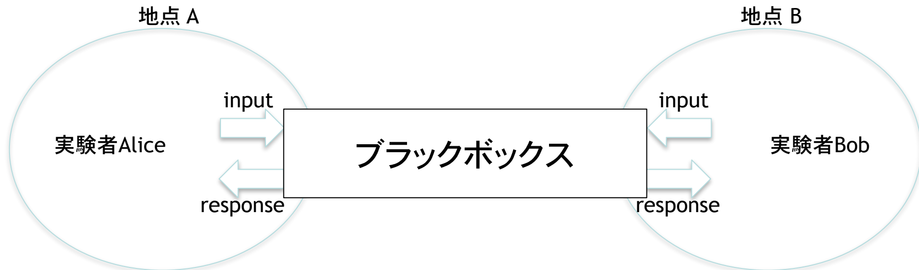
自然法則を探る：自然界に働きかけ応答を見る



（局所的）

知りたい法則は局所的とは限らない　→　次ページ

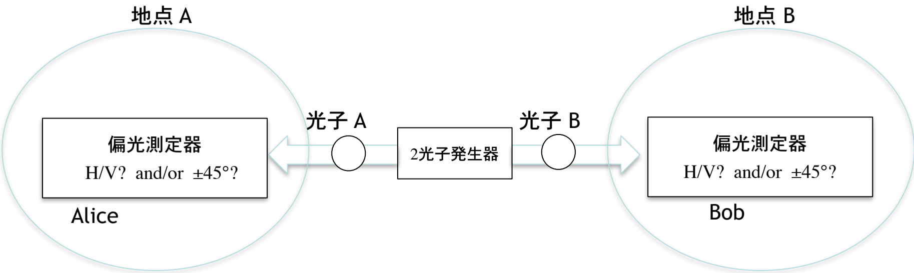
自然法則を探る：自然界に働きかけ応答を見る



ブラックボックスから出る光子AとBをそれぞれAliceとBobが偏光測定し、連絡を取りあって偏光の相関を見ることによってこの2光子発生器がどんな素性か探る。

（この場合のinputは、検出装置を組立てて待ち構えること）

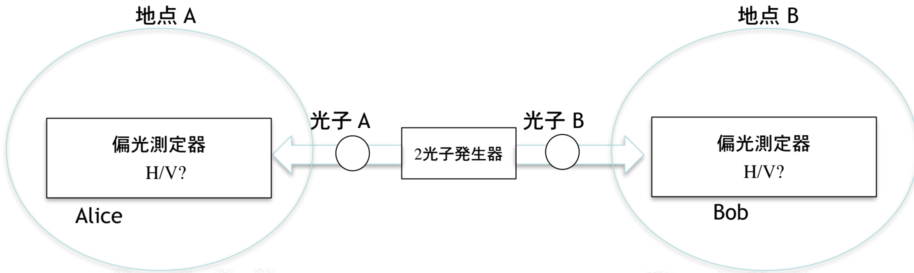
変数の定義:



$$X_{\rm A} = 1 \quad \text{for H}$$
$$X_{\rm A} = -1 \quad \text{for V}$$
$$Y_{\rm A} = 1 \quad \text{for} + 45\text{degree}$$
$$Y_{\rm A} = -1 \quad \text{for} - 45\text{degree}$$

$$X_{\rm B} = 1 \quad \text{for H}$$
$$X_{\rm B} = -1 \quad \text{for V}$$
$$Y_{\rm B} = 1 \quad \text{for} + 45\text{degree}$$
$$Y_{\rm B} = -1 \quad \text{for} - 45\text{degree}$$

(まず簡単のため)H/V のみ観測する場合

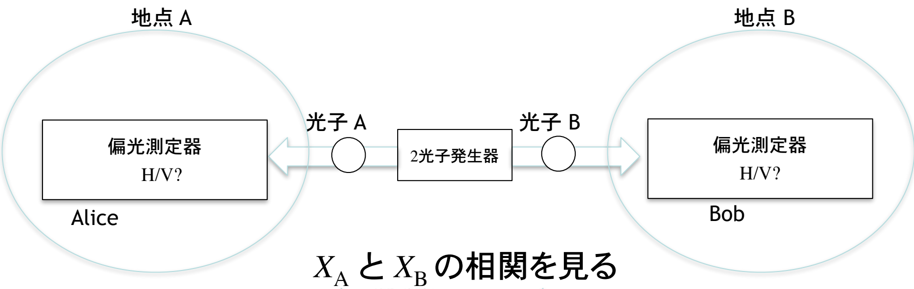


$$X_{\rm A} = 1 \quad \text{for H}$$
$$X_{\rm A} = -1 \quad \text{for V}$$

$$X_{\rm B} = 1 \quad \text{for H}$$
$$X_{\rm B} = -1 \quad \text{for V}$$

(まず簡単のため)H/V のみ観測する場合

(a) HとVを独立にランダムに発生するブラックボックス



$X_{\rm A}$ と $X_{\rm B}$ の相関を見る

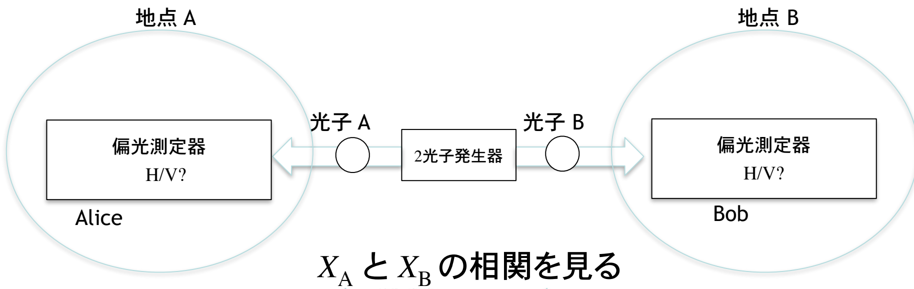
$X_{\rm A}$	$X_{\rm A}X_{\rm B}$	$X_{\rm B}$
1	1	1
1	-1	-1
-1	1	-1
1	-1	-1
-1	1	1
-1	1	1
.	.	.
.	.	.

$$\langle X_{\rm A}X_{\rm B}\rangle = 0$$

→「このBBは、HVについては独立にランダムな二光子を発生している」とAliceとBobは結論。

(まず簡単のため)H/V のみ観測する場合

(b) HV偏光に負の「古典的相関」がある光子AとBを出すBB



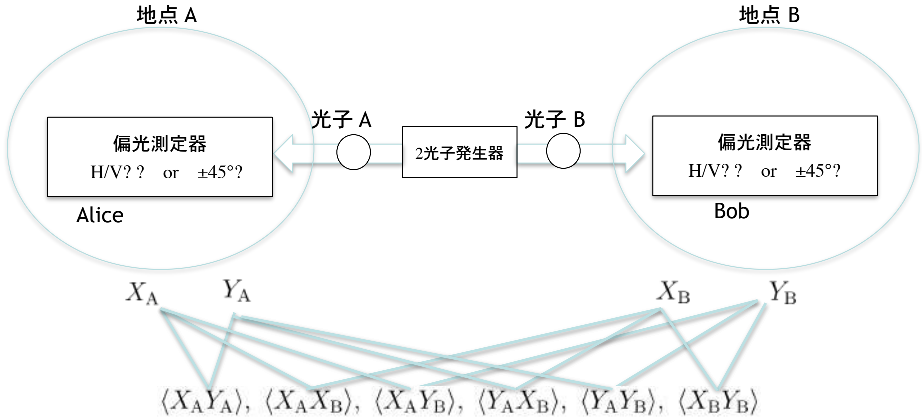
$X_{\rm A}$ と $X_{\rm B}$ の相関を見る

$X_{\rm A}$	$X_{\rm A}X_{\rm B}$	$X_{\rm B}$
1	-1	-1
1	-1	-1
-1	-1	1
1	-1	-1
-1	-1	1
-1	-1	1
.	.	.
.	.	.

$$\langle X_{\rm A}X_{\rm B}\rangle = -1$$

→「このBBは、HVについては100%負の相関がある二光子を発生している」とAliceとBobは結論。

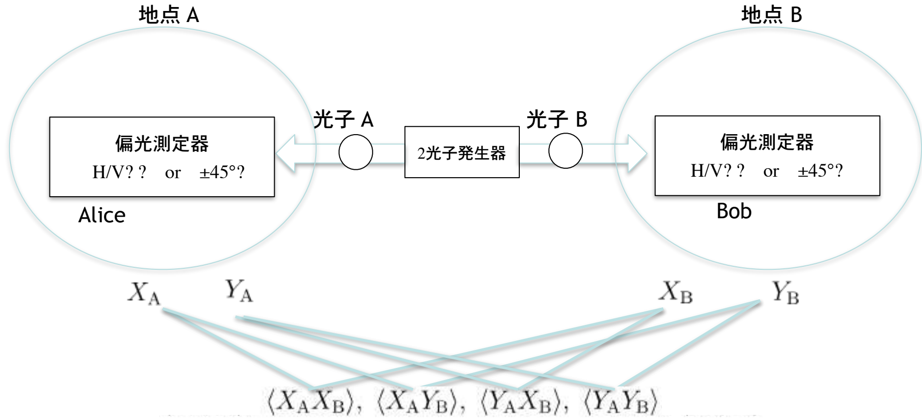
H/V と +45度/-45度の両方を観測する場合



4変数の間の「2変数相関」は${}_4C_2(=6)$種類ある。

ここで新たなゲームのルール:
同一地点で X と Y の両方を測ることはしない(できない)。

H/V と +45度/-45度を観測する場合

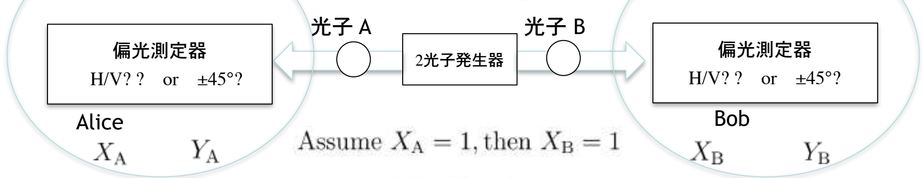


以後、この4つの相関に限定する。そのとき
AliceとBobは2光子発生器の素性について何が言えるか?

Case 1:

右のような結果になった場合、「局所実在論」と矛盾はないか?

$$\langle X_A X_B\rangle = 1$$
$$\langle X_A Y_B\rangle = 1$$
$$\langle Y_A X_B\rangle = 1$$
$$\langle Y_A Y_B\rangle = 1$$



Assume $X_A = 1$, then $X_B = 1$

then $Y_A = 1$

then $Y_B = 1$

then $X_A = 1$

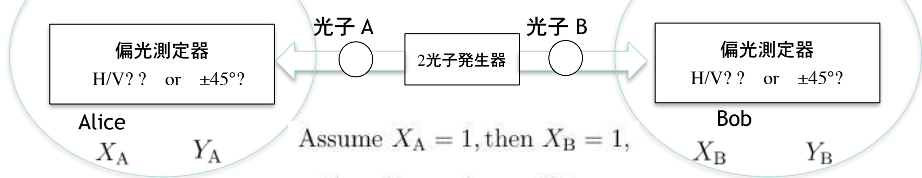
特に矛盾はない。

→ AliceとBobは、「このBBから出る二光子の偏光の関係は局所実在論でも説明できる」と結論。

Case 2:

右のような結果になった場合、「局所実在論」と矛盾はないか?

$$\langle X_A X_B\rangle = 1$$
$$\langle X_A Y_B\rangle = 0$$
$$\langle Y_A X_B\rangle = 0$$
$$\langle Y_A Y_B\rangle = 1$$



Assume $X_A = 1$, then $X_B = 1$,

then Y_A can be anything,

then Y_B should be equal to Y_A,

then X_A can be anything.

特に矛盾はない。

→ AliceとBobは、「このBBから出る二光子の偏光の関係もやはり局所実在論で説明できる」と結論。

Case 3:

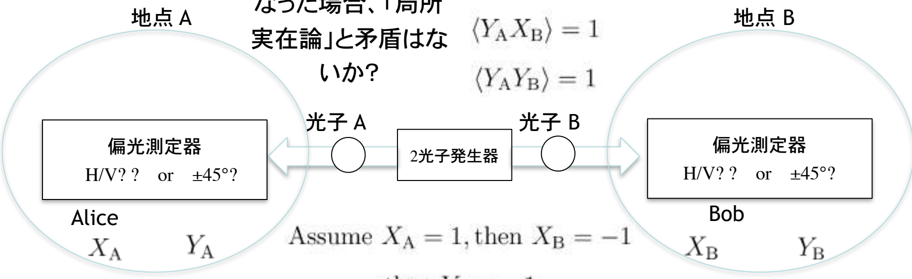
右のような結果になった場合、「局所実在論」と矛盾はないか?

$\langle X_A X_B \rangle = -1$

$\langle X_A Y_B \rangle = 1$

$\langle Y_A X_B \rangle = 1$

$\langle Y_A Y_B \rangle = 1$



Assume $X_A = 1$, then $X_B = -1$

then $Y_A = -1$

then $Y_B = -1$

then $X_A = -1$

矛盾!

→ AliceとBobは、「このBBから出る二光子の偏光の関係は局所実在論では説明できない」と結論。

候補1: $D \equiv \left| \langle X_A X_B \rangle + \langle X_A Y_B \rangle + \langle Y_A X_B \rangle + \langle Y_A Y_B \rangle \right|$

→ $D = 4$ for Case 1,
2 for Case 2,
2 for Case 3.

→ うまく判別できていない

候補2: $D \equiv \left| \langle X_A X_B \rangle - \langle X_A Y_B \rangle - \langle Y_A X_B \rangle + \langle Y_A Y_B \rangle \right|$

→ $D = 0$ for Case 1,
2 for Case 2,
2 for Case 3.

→ うまく判別できていない

候補3: $D \equiv \left| -\langle X_A X_B \rangle + \langle X_A Y_B \rangle + \langle Y_A X_B \rangle + \langle Y_A Y_B \rangle \right|$

→ $D = 2$ for Case 1,
0 for Case 2,
4 for Case 3.

→ これはいいかもしれない

候補3がよい判別式であることをきちんと導けないか?

Case 4:

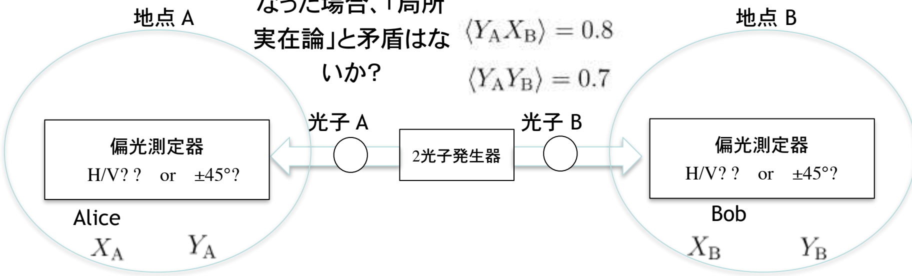
右のような結果になった場合、「局所実在論」と矛盾はないか?

$\langle X_A X_B \rangle = -0.5$

$\langle X_A Y_B \rangle = 0.3$

$\langle Y_A X_B \rangle = 0.8$

$\langle Y_A Y_B \rangle = 0.7$

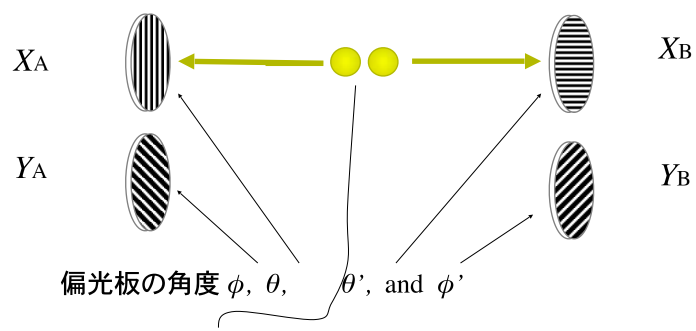


すぐにはわからない。
(Case 1〜3は相関値が±1とか 0 などで、論理で追いやすかった)

→ Case 4 のような場合にも一発で「局所実在論と矛盾するか?」を判定できる「判別式」が欲しい!

→ まずは試行錯誤的に判別式の候補を探ってみよう。

ベル不等式 (CHSHタイプ) の導出



二光子の偏光は、発生された時点で決まっている(実在論)とする。
→ 我々にはわからない 隠れた変数 λ に支配されていると仮定。

→$X_A = X_A(\theta, \lambda)$ $Y_A = Y_A(\phi, \lambda)$ $X_B = X_B(\theta', \lambda)$ $Y_B = Y_B(\phi', \lambda)$

隠れた変数の値がλである確率を $p(\lambda)$とする。

まず、中学レベルの数学として、不等式 $-1 \leqq X_A, Y_A, X_B, Y_B \leqq 1$ を満たす変数について、不等式 $-2 \leqq (Y_A - X_A)X_B + (Y_A + X_A)Y_B \leqq 2$ が成立。

左辺、中辺、右辺に $p(\lambda)$ を乗じて λ で積分することにより、ただちに

$-2 \leqq -\langle X_A X_B \rangle + \langle X_A Y_B \rangle + \langle X_B Y_A \rangle + \langle Y_A Y_B \rangle \leqq 2$ を得る。(証明終わり)

試しに Case 1 – 4　を判別してみよう。

$$D \equiv \left| -\langle X_A X_B\rangle + \langle X_A Y_B\rangle + \langle Y_A X_B\rangle + \langle Y_A Y_B\rangle \right|$$

Case 1	Case 2	Case 3	Case 4
$\langle X_A X_B\rangle = 1$	$\langle X_A X_B\rangle = 1$	$\langle X_A X_B\rangle = -1$	$\langle X_A X_B\rangle = -0.5$
$\langle X_A Y_B\rangle = 1$	$\langle X_A Y_B\rangle = 0$	$\langle X_A Y_B\rangle = 1$	$\langle X_A Y_B\rangle = 0.3$
$\langle Y_A X_B\rangle = 1$	$\langle Y_A X_B\rangle = 0$	$\langle Y_A X_B\rangle = 1$	$\langle Y_A X_B\rangle = 0.8$
$\langle Y_A Y_B\rangle = 1$	$\langle Y_A Y_B\rangle = 1$	$\langle Y_A Y_B\rangle = 1$	$\langle Y_A Y_B\rangle = 0.7$
$D = 2$	$D = 0$	$D = 4$	$D = 2.3$
↓	↓	↓	↓
局所実在論でもあり得る	局所実在論でもあり得る	局所実在論はあり得ない	局所実在論はあり得ない

実は、2√2 という値はこの特殊例だけでなく、一般に最大値である。
(Tsirelson)

$$S = \begin{pmatrix} \langle X_A X_A\rangle & \langle X_A X_B\rangle & \langle X_A Y_A\rangle & \langle X_A Y_B\rangle \\ \langle X_B X_A\rangle & \langle X_B X_B\rangle & \langle X_B Y_A\rangle & \langle X_B Y_B\rangle \\ \langle Y_A X_A\rangle & \langle Y_A X_B\rangle & \langle Y_A Y_A\rangle & \langle Y_A Y_B\rangle \\ \langle Y_B X_A\rangle & \langle Y_B X_B\rangle & \langle Y_B Y_A\rangle & \langle Y_B Y_B\rangle \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \langle X_A Y_A\rangle & \langle X_A Y_B\rangle \\ \langle X_B Y_A\rangle & \langle X_B Y_B\rangle \end{pmatrix} \equiv T$$

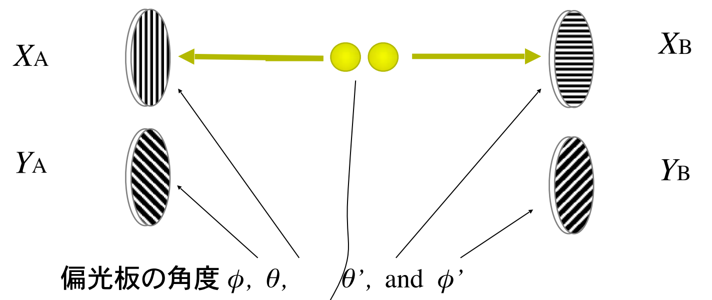
$$D = \langle X_A Y_A\rangle + \langle X_A Y_B\rangle + \langle X_B Y_A\rangle - \langle X_B Y_B\rangle$$
$$= \mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} \langle X_A Y_A\rangle & \langle X_A Y_B\rangle \\ \langle X_B Y_A\rangle & \langle X_B Y_B\rangle \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right]$$
$$= \sqrt{2}\,\mathrm{Tr}\left[TH\right]$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & H \\ H & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Tr}[SR] = \mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} \begin{matrix} 1 & z \\ \bar{z} & 1 \end{matrix} & T \\ {}^tT & \begin{matrix} 1 & w \\ \bar{w} & 1 \end{matrix} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & H \\ H & 1 \end{pmatrix}\right]$$
$$= \mathrm{Tr}\left[\begin{pmatrix} 1 & z \\ \bar{z} & 1 \end{pmatrix} + TH\right] + \mathrm{Tr}\left[{}^tTH + \begin{pmatrix} 1 & w \\ \bar{w} & 1 \end{pmatrix}\right]$$
$$= 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}D + \frac{1}{\sqrt{2}}D + 2$$
$$= 4 + \sqrt{2}\,D$$

局所実在論を仮定せず、量子力学の場合はどうなるか？



この二光子はベル状態 $|\psi^-\rangle = |HV\rangle - |VH\rangle$ としよう。
さらに簡単のため $\phi - \theta = \theta - \theta' = \theta' - \phi' \equiv \Theta$ とする。

このとき $-\langle X_A X_B\rangle + \langle X_A Y_B\rangle + \langle X_B Y_A\rangle + \langle Y_A Y_B\rangle$ の計算は簡単。

$|\psi^-\rangle$ を仮定したとき、答は $3\cos 2\Theta - \sin 6\Theta$ となる。

→ これは $\Theta = \pi/8$ のとき最大となり、その値は $2\sqrt{2}$ 。

→ $-2\sqrt{2} \leqq -\langle X_A X_B\rangle + \langle X_A Y_B\rangle + \langle X_B Y_A\rangle + \langle Y_A Y_B\rangle \leqq 2\sqrt{2}$

一般にどのような $R = \begin{pmatrix} 1 & U \\ U^\dagger & 1 \end{pmatrix}$ に対しても、R は

正値エルミート行列である。だから、
ユニタリ行列 U がありさえすれば、前ページの理論が成り立つ。
判別式の候補 $D \equiv -\langle X_A X_B\rangle + \langle X_A Y_B\rangle + \langle Y_A X_B\rangle + \langle Y_A Y_B\rangle$ に対しては、U はきちんと見つかり、それは H（アダマール行列）。
ところが、候補 $D \equiv \langle X_A X_B\rangle + \langle X_A Y_B\rangle + \langle Y_A X_B\rangle + \langle Y_A Y_B\rangle$
に対しては、そのような U は見つからない。
候補 $D \equiv \langle X_A X_B\rangle - \langle X_A Y_B\rangle - \langle Y_A X_B\rangle + \langle Y_A Y_B\rangle$ に対しても、
そのような U は見つからない。

もし $-\langle X_A X_B\rangle + \langle X_A Y_B\rangle + \langle X_B Y_A\rangle + \langle Y_A Y_B\rangle$ 以外の候補に

対しても S の正値性と U の存在が確認されれば、不等式は
$2\sqrt{2}$ まで行く。(Tsirelson)
他にも似たような議論がある：「$2\sqrt{2}$ という値は量子論特有ではなく "情報因果律" を仮定すれば出る」(Marcin Pawlowski *et. al*)

さて Case 3 を思い出そう $\langle X_A X_B \rangle = -1$

$$\langle X_A Y_B \rangle = 1$$

$$\langle Y_A X_B \rangle = 1$$

$$\langle Y_A Y_B \rangle = 1$$

これは $D = 4$ となる。→ このようなデータは局所実在論に反するだけでなく、量子力学をも超越している。

$2\sqrt{2} < D \leqq 4$ という世界はどんな世界なのか?

量子力学の世界よりもっと面白い世界だろうか? たとえば

そのような世界で情報処理は「量子情報処理より強力」か?

あるいは相対論を破る通信が可能となってしまうか?

（もしそうなら、相対論と共存するために、そのような世界を神様は許さず、しかし相対論と両立する最大限の不思議な世界である量子力学まで許したとも言える・・・?）

Nevertheless, Alice and Bob cannot utilize the response of this box to do superluminal communication because Alice (Bob) cannot know the input bit of Bob (Alice) by knowing the PR box's response to Alice (Bob).

$$x=0,\ y=0 \quad \rightarrow \quad a=0,\ b=0 \quad \text{or} \quad a=1,\ b=1$$

$$x=0,\ y=1 \quad \rightarrow \quad a=0,\ b=0 \quad \text{or} \quad a=1,\ b=1$$

$$x=1,\ y=0 \quad \rightarrow \quad a=0,\ b=0 \quad \text{or} \quad a=1,\ b=1$$

$$x=1,\ y=1 \quad \rightarrow \quad a=0,\ b=1 \quad \text{or} \quad a=1,\ b=0$$

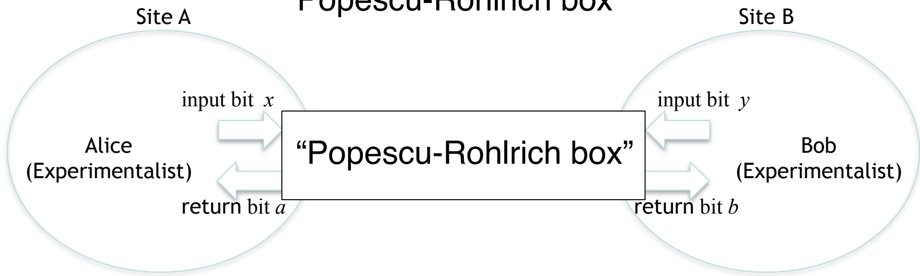
Also, it can be shown that $D = 4$ for PR box.

→ "$D = 4$ まで行ってしまう世界では超光速通信ができてしまう" はウソ。

同様に、我々が超光速通信ができないからといって、ブラックボックスの中で超光速通信がなされていない、とは限らない。

(現に Bohm's の「非局所隠れた変数」は超光速で伝わるが、我々はそれを使って超光速通信に利用することはできない。)

"Popescu-Rohlrich box"



This blackbox returns bits a and b so that $P(a,b|x,y) = \begin{cases} 1/2 & (a \oplus b = xy) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$

More concretely, inputs → outputs

$$x=0,\ y=0 \quad \rightarrow \quad a=0,\ b=0 \quad \text{or} \quad a=1,\ b=1$$

$$x=0,\ y=1 \quad \rightarrow \quad a=0,\ b=0 \quad \text{or} \quad a=1,\ b=1$$

$$x=1,\ y=0 \quad \rightarrow \quad a=0,\ b=0 \quad \text{or} \quad a=1,\ b=1$$

$$x=1,\ y=1 \quad \rightarrow \quad a=0,\ b=1 \quad \text{or} \quad a=1,\ b=0$$

It is obvious that if the box responds to Alice and Bob instantaneously, then superluminal communication takes place inside the box.

というわけで、私は「Bohmの理論」すなわち「非局所隠れた変数の理論」を「問答無用」とまで拒絶することはなくなった。

ではBohmの理論を見て行こう。

数理科学2013年3月号:「人物で学ぶ物理10」〜仮説クリエーターとしてのデイヴィッド・ボーム〜 (拙著) より

まず単一粒子のシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi + V(r)\psi \qquad (1)$$

から出発する。ψ は複素数なので

$$\psi = R\exp\left(\frac{iS}{\hbar}\right) \qquad (2)$$

と極形式で書ける。(2) 式を (1) 式に代入して数行の計算ののち実部と虚部を両辺それぞれ等しいと置くと

$$\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{1}{2m}\left(R\nabla^2 S + 2\nabla R\cdot\nabla S\right) \qquad (3)$$

および

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\left[\frac{\nabla S\cdot\nabla S}{2m} + V(r) - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\nabla^2 R}{R}\right] \qquad (4)$$

を得る。すなわちシュレーディンガー方程式 (1) を ψ の絶対値 R の方程式 (3) と位相 S の方程式 (4) に書き下した。次に、$R=\sqrt{P}$ となる正の (非負の) 数 P を導入すると、(3) と (4) はそれぞれ

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla\cdot\left(P\frac{\nabla S}{m}\right) = 0 \qquad (5)$$

および

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\nabla S)^2}{2m} + V(r) - \frac{\hbar^2}{4m}\left[\left(-\frac{1}{2}\frac{(\nabla P)^2}{P^2} + \frac{\nabla^2 P}{P}\right)\right] = 0 \qquad (6)$$

と書ける。ここまで初等ベクトル解析のよい練習問題である。

ここで $\hbar\to 0$ とした極限、すなわち古典論の場合を考えてみよう。すると (6) 式は、ポテンシャル $V(r)$ 中を泳ぐ粒子について、S*1) が古典的なハミルトン-ヤコビの方程式の解であることを示している。運動方程式に従う粒子の軌跡のアンサンブルを考えるならば、次のことがよく知られている。すなわち $S=$const. であるような曲面を空間内に一つとり、全ての軌跡がこの面に垂直であるとき、これらの軌跡は他の全ての $S=$const. であるような曲面群に垂直である*2)。

このとき $\nabla S(r)/m$ は速度ベクトル $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ に等しい。これを使うと、もう一つ残っていた (5) 式は

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \nabla\cdot(Pv) = 0 \qquad (7)$$

となる。この式は $P(r)$ をこの集団に対する粒子の存在確率と解釈するとつじつまが合う。そうすると $P\mathbf{v}$ はこの集団における平均的な流れとなり、(7) 式は確率の保存を意味する。ちなみにこれは流体力学における圧縮性流体の質量保存の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho v) = 0$$

に対応する。ρ は質量密度である。

それでは、上のような解釈が、量子力学に戻って $\hbar\neq 0$ とした場合にどれだけ通用するか、考えてみよう。(6) 式において、それぞれの粒子が "古典" ポテンシャル $V(r)$ だけでなく、余分のポテンシャル

$$U(r) = -\frac{\hbar^2}{4m}\left[\left(-\frac{1}{2}\frac{(\nabla P)^2}{P^2} + \frac{\nabla^2 P}{P}\right)\right] = -\frac{\hbar^2}{m}\frac{\nabla^2 R}{R} \qquad (8)$$

の下で運動しているとしよう。つまり粒子は $V(r)+U(r)$ というポテンシャルの中を動いていると考えるのである。そうすれば (6) 式は依然としてハミルトン-ヤコビの方程式であり、$\nabla S(r)/m$ も依然として粒子速度であり、(5) 式は依然として確率保存の式である。これはシュレーディンガー方程式を書き変えただけのものであり、しかしその解釈は、ポテンシャル $V(r)$ 中を動く量子力学的粒子は $V(r)+U(r)$ 中を動く古典粒子と見なせることを見通しよく示している。この余分に付け加わるポテンシャル $U(r)$ を「量子ポテンシャル」とボームは名付けた。もちろんこのポテンシャルは、外部条件として与えられた $V(r)$ と異なり、何か粒子自身の存在確率の分布 P の平方根に依存している。粒子としての存在確率 P と波としての位相 S が互いに絡み合って発展しているので、ド・ブロイの「パイロット波」を観念でなくきちんと定式化したとも言える。

この理論を使えば、初期時刻における粒子の存在確率分布と位相の空間分布さえ与えれば、以後はまるでリウヴィル方程式のごとく発展を追える。つまり初期時刻における粒子の存在確率分布と位相の空間分布が「隠れた変数」とも言える。通常の量子力学の解釈では $|\psi|^2$ は測定して初めてそこに見いだされることがわかる確率なので「発見確率」というのが妥当であるが、ボームの解釈では「存在確率」と言うことになる。使っている数式自体はシュレーディンガー方程式そのものであることがわかるであろう。引き続くボームの論文ではエンタングルした粒子系を扱っている。そこでの考察により、ボームの理論は非局所性を帯びていることが示される。ボームの理論がベル不等式を破ることはこのことからも当然である。通常の量子力学と—その解釈以外—何ら変わりはない理論なのだ。(以下略)

的粒子は $V(r)+U(r)$ 中を動く古典粒子と見なせることを見通しよく示している。この余分に付け加わるポテンシャル $U(r)$ を「量子ポテンシャル」とボームは名付けた。もちろんこのポテンシャルは、外部条件として与えられた $V(r)$ と異なり、何か粒子自身の存在確率の分布 P の平方根に依存している。粒子としての存在確率 P と波としての位相 S が互いに絡み合って発展しているので、ド・ブロイの「パイロット波」を観念でなくきちんと定式化したとも言える。

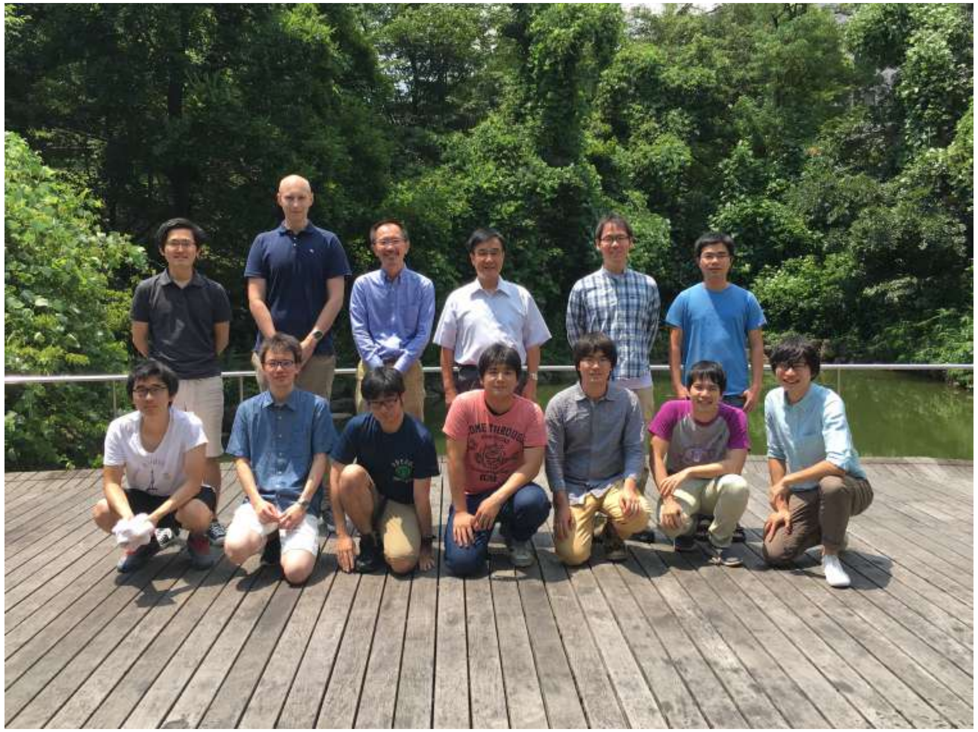
この理論を使えば、初期時刻における粒子の存在確率分布と位相の空間分布さえ与えれば、以後はまるでリウヴィル方程式のごとく発展を追える。つまり初期時刻における粒子の存在確率分布と位相の空間分布が「隠れた変数」とも言える。通常の量子力学の解釈では $|\psi|^2$ は測定して初めてそこに見いだされることがわかる確率なので「発見確率」というのが妥当であるが、ボームの解釈では「存在確率」と言うことになる。使っている数式自体はシュレーディンガー方程式そのものであることがわかるであろう。引き続くボームの論文ではエンタングルした粒子系を扱っている。そこでの考察により、ボームの理論は非局所性を帯びていることが示される。ボームの理論がベル不等式を破ることはこのことからも当然である。通常の量子力学と—その解釈以外—何ら変わりはない理論なのだ。(以下略)

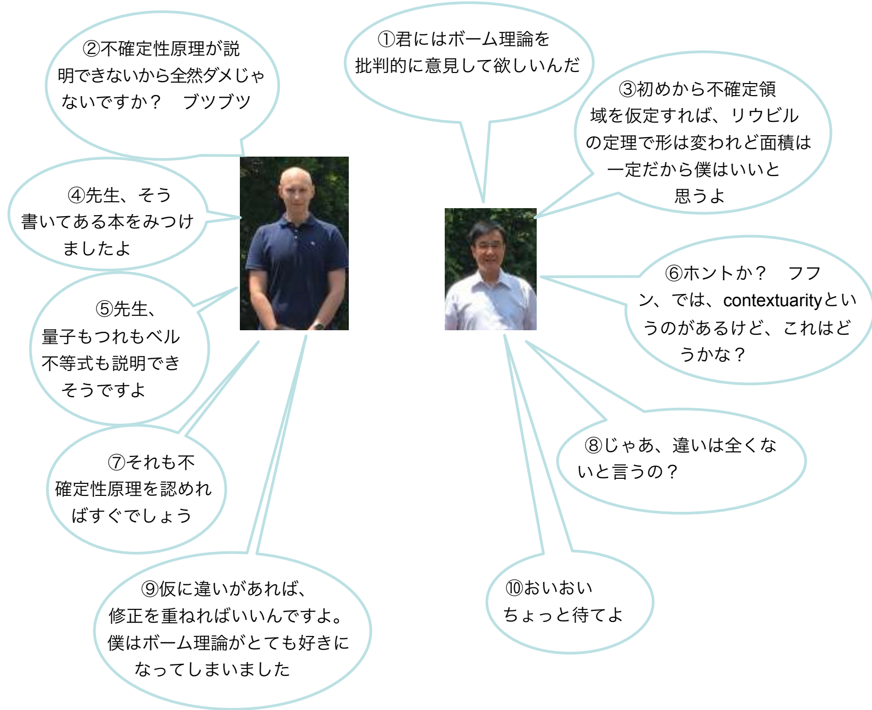
つまり、

もともと「局所性 or 実在性 or その両方」が間違っているわけだが、Bohm 理論は実在性を保持して全ての誤りを局所性に押しつける理論である。
この意味で、ブラックボックスの中では実在としての変数 R や S が非局所的に動き回るモデルである。

もちろんブラックボックスの外にいる我々は、その応答を利用して超光速通信をすることはできない。

「非局所性」の意味:
- **Bohmの量子ポテンシャルの非局所性とは、「ブラックボックスの中で超光速で伝わる」ことを意味。**
- **「影響が空間を連続的に伝わる」意の局所性は、ブラックボックスの外からaccessibleなものの性質。**





ボーム理論はどこまで行くか？

↓

あなたはどこまで修正に耐えられるか？

に依るのかもしれない

ご静聴ありがとうございました