# 方程式をいじって色々な解を作る: 超対称性量子力学や電磁双対について

中田 陽介

信州大学環境・エネルギー材料科学研究所

8–9. Jan, 2017

イントロ: 超対称量子力学

電気回路にあらわれる SUSY

電磁双対性・バビネの原理

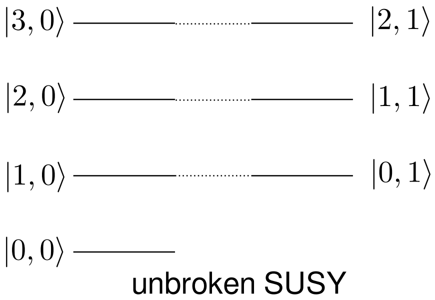
バビネの原理とチェッカーボード

まとめ

# イントロ: 超対称量子力学

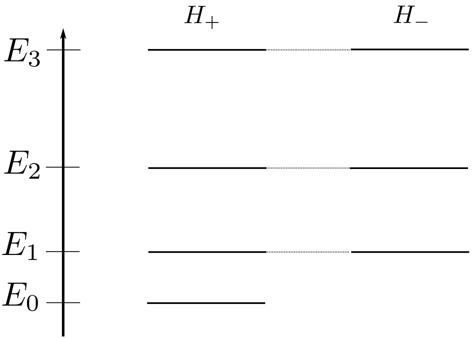
# 超対称性とは?

- ボソンとフェルミオンの入れ替えに関する対称性
  - ボソンとフェルミオン 1 つあたりのエネルギーが一致
    → 各準位が 2 重縮退する (基底状態は違う可能性あり)




- $|m,n\rangle$: ボソン $m$ 個, フェルミオン $n$ 個

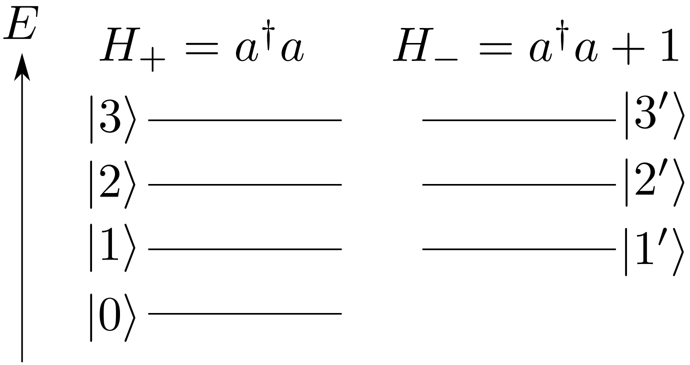
# 超対称量子力学




エネルギースペクトルが二重縮退する量子系を研究
(最低準位を除いて)
(超対称理論における対称性のアナロジを持つ)

坂本 眞人 「量子力学から超対称性へ」, サイエンス社 (2012).

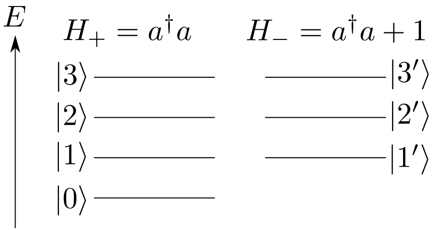
# 例: 2つの調和振動子




ただし $[a, a^\dagger] = 1$

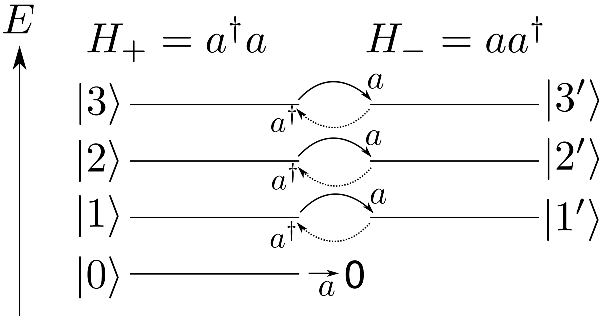
スペクトルは最低準位を除いて一致 (あたりまえ)

# なぜスペクトルが一致したのか?




1. $[a, a^\dagger] = 1 \rightarrow H_- = a^\dagger a + 1 = aa^\dagger$
   因数分解されたハミルトニアンが入れ替えられている:
   $H_+ = a^\dagger a$, $H_- = aa^\dagger$
2. $H_+ |n\rangle = (a^\dagger a) |n\rangle = n |n\rangle$ の両辺に $a$ をかけてみる
3. $aa^\dagger (a |n\rangle) = n(a |n\rangle) \rightarrow H_-(a |n\rangle) = n(a |n\rangle)$
4. $|n'\rangle = a |n\rangle$ (もう一方の固有ベクトルが求まる)

# 調和振動子まとめ

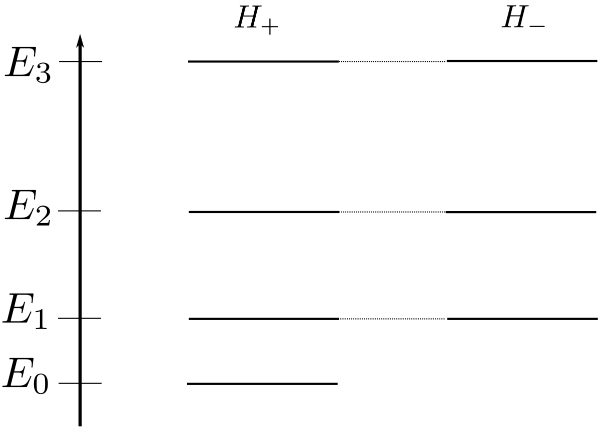



- $|n'\rangle = a\,|n\rangle$ だが $|0'\rangle$ は作れない
  ($a\,|0\rangle = 0$ で消えてしまう)

最低準位はペアを組まない可能性がある

# 一般化 → Witten 模型

$H_+ = A^\dagger A$, $H_- = AA^\dagger$




1 次元問題 →$A = \frac{1}{\sqrt{2m}}\left(-\mathrm{i}\hbar\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \mathrm{i}W'(x)\right)$

# SUSY の利点

- 一見異なる系でもスペクトルが対応する
    - 2 つの系の複合系に SUSY の対称性 (交換関係)
- 片方が解けているともう一方の厳密解が求まる
  (厳密解が求まる系は裏に対称性があるから求まるとも言える)

# 電気回路にあらわれる SUSY

# 電気回路にあらわれる SUSY

金属構造で超対称性 (SUSY) が現れる例を構成する

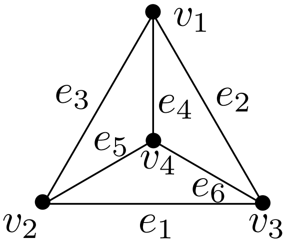
- メタマテリアル・プラズモニクスへの展開可能性

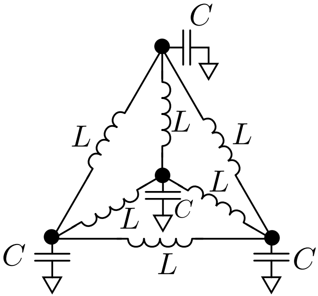
方法

- 電気回路で例を構成
  - グラフとライングラフ上の LC 回路網の共鳴スペクトルが一致する
- 高周波領域に適用
  - マクスウェル理論のスケール不変性より

# 単純 $m$-正則グラフ $G$ 上の LC 回路網

- 単純グラフ: 多重辺やループがない
- $m$-正則: 各頂点に $m$ 個の辺が接続

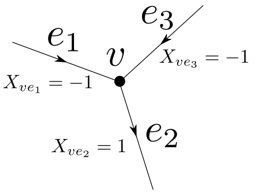



- $G$ 上の LC 回路網:
  辺上に同一コイル, グランドと頂点間に同一コンデンサ

# 電荷保存則

$$\dot{\boldsymbol{q}} = -\mathsf{X}\boldsymbol{J}$$




電荷: $\boldsymbol{q} = [q_v]^{\mathrm{T}}$, 電流: $\boldsymbol{J} = [J_e]^{\mathrm{T}}$, 接続行列: $\mathsf{X} = [X_{ve}]$

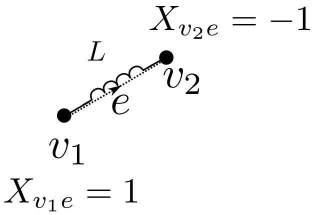
$$X_{ve} = \begin{cases} 1 & (\text{頂点 } v \text{ から辺 } e \text{ がでている}) \\ -1 & (\text{頂点 } v \text{ に辺 } e \text{ が入っている}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

# コイルとコンデンサの応答

コイル:

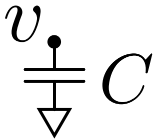
$$L\dot{\boldsymbol{J}} = \mathsf{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Phi}$$

静電ポテンシャル: $\boldsymbol{\Phi} = [\Phi_v]^{\mathrm{T}}$




コンデンサ:

$$\boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{C}\boldsymbol{q}$$



# 単純 $m$-正則グラフ上の LC 回路網の共鳴

- $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, 角周波数 $\omega$

$$\ddot{\boldsymbol{q}} = -{\omega_0}^2 \mathsf{L} \boldsymbol{q}$$

$\boldsymbol{q} = \tilde{\boldsymbol{q}} \exp(-\mathrm{i}\omega t) + \mathrm{c.c.} \rightarrow$

$$\mathsf{L}\tilde{\boldsymbol{q}} = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \tilde{\boldsymbol{q}}$$

- グラフラプラシアン: $\mathsf{L} = \mathsf{X}\mathsf{X}^{\mathrm{T}}$

# グラフラプラシアンの別の表し方

(向きのない) 接続行列: $\bar{\mathsf{X}} = [\bar{X}_{ve}]$

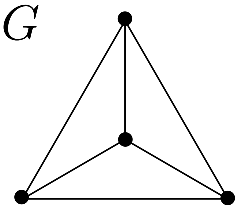
$$\bar{X}_{ve} = \begin{cases} 1 & (\text{頂点 } v \text{ と辺 } e \text{ が繋がっている}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

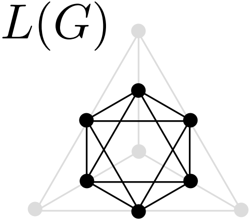
$$\mathsf{L} = -\bar{\mathsf{X}}\bar{\mathsf{X}}^{\mathrm{T}} + 2m\mathsf{I}$$

($m$: 頂点の次数, I: 単位行列)

# ライングラフ $L(G)$

1. 元のグラフ $G$ の辺を $L(G)$ の頂点とみなす
2. $G$ の辺 $e_1, e_2$ が共通の頂点を持つ $\rightarrow$ 対応する $L(G)$ の 2 頂点を繋ぐ



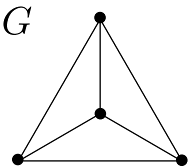



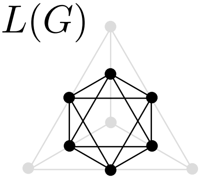

ライングラフのグラフラプラシアン:

$$\mathsf{L}_{\mathrm{L}} = -\bar{\mathsf{X}}^{\mathrm{T}}\bar{\mathsf{X}} + 2m\mathsf{I}_{\mathrm{L}}$$

($\mathsf{I}_{\mathrm{L}}$: 単位行列)

# グラフとライングラフ上の LC 回路のスペクトル




$$\mathsf{L}\tilde{\boldsymbol{q}} = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \tilde{\boldsymbol{q}}$$

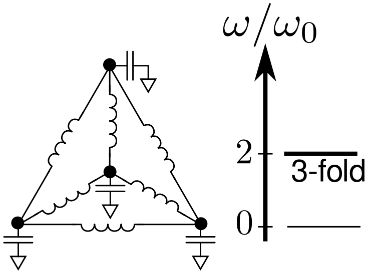
$$\mathsf{L} = -\boxed{\bar{\mathsf{X}}\bar{\mathsf{X}}^{\mathrm{T}}} + 2m\mathsf{I}$$

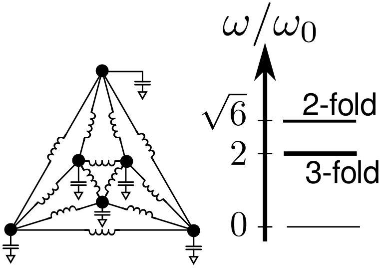
$$\mathsf{L}_{\mathrm{L}}\tilde{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{L}} = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \tilde{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{L}}$$

$$\mathsf{L}_{\mathrm{L}} = -\boxed{\bar{\mathsf{X}}^{\mathrm{T}}\bar{\mathsf{X}}} + 2m\mathsf{I}_{\mathrm{L}}$$

共鳴スペクトルが一致しなければならない (最高準位は除いて)

# 具体例: 有限グラフ

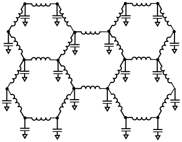


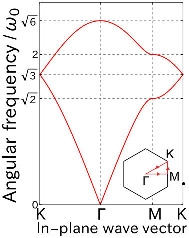




スペクトルが一致 (最高準位を除いて)

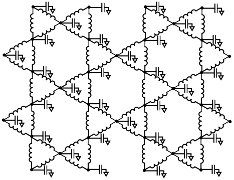
# 具体例: 6 角格子とカゴメ格子

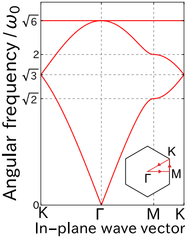
六角格子






カゴメ格子

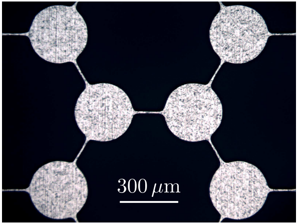




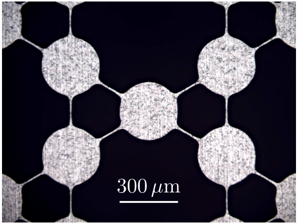

スペクトルが一致
分散も一致 (フラットバンドを除いて)

# 金属 6 角格子・カゴメ格子

6角格子




金属カゴメ格子




(SUS304 製, 厚み: $30\,\mu$m)

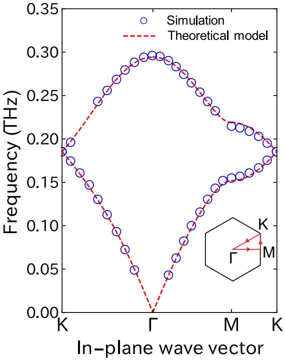
回路モデルで説明可

Y. Nakata *et al.*, Phys. Rev. B **85**, 205128 (2012).

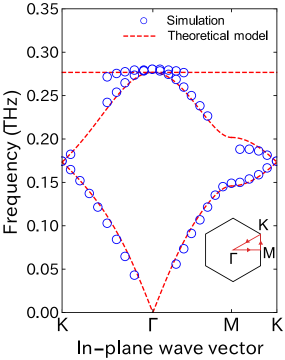
S. Kajiwara *et al.*, Phys. Rev. B **93**, 075126 (2016).

# シミュレーションによる比較

## 6角格子

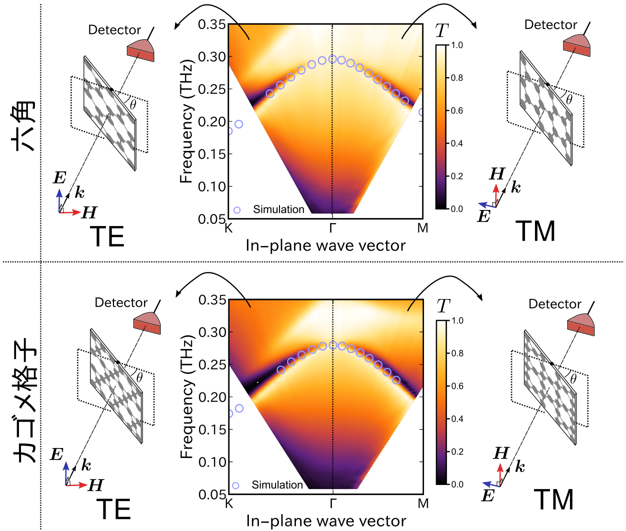



## カゴメ格子




(P = $C^{-1}$(I + $\eta$A), A: 隣接行列でフィット)
バンドの対応が示された

# 第２バンドの対応をテラヘルツ時間領域分光法で観測



# 電磁双対性・バビネの原理

# ヘルムホルツ方程式

マクスウェル方程式

- $$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$
- $$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

$c = 1/\sqrt{\varepsilon\mu} \rightarrow$ 波動方程式

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \mathrm{Re}[\tilde{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x})\exp(-\mathrm{i}\omega t)]$

ヘルムホルツ方程式

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{\boldsymbol{E}} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \tilde{\boldsymbol{E}}$$

# ヘルムホルツ方程式における SUSY

ヘルムホルツ方程式

$$\nabla \times \nabla \times \tilde{\boldsymbol{E}} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \tilde{\boldsymbol{E}}$$

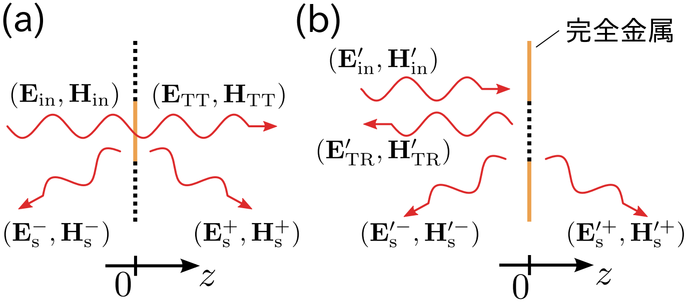
$A = A^\dagger = \nabla\times$ (パートナーは自分自身)
$\tilde{\boldsymbol{E}}$ が解 $\to A\tilde{\boldsymbol{E}}$ も解

電磁双対性
$\tilde{\boldsymbol{E}} \to \nabla \times \tilde{\boldsymbol{E}} \propto \tilde{\boldsymbol{H}}$ の置き替えに関して方程式は不変

## マクスウェル方程式における電磁双対

- マクスウェル方程式
  - $$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$
  - $$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$
- 電磁双対変換:
  $\boldsymbol{E} \to -Z\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{E}/Z$
  $(Z = \sqrt{\mu/\varepsilon})$
  - 対応する保存量はヘリシティ

# バビネの原理




入射場: $(\boldsymbol{E}'_{\mathrm{in}}, \boldsymbol{H}'_{\mathrm{in}}) = (-Z_0\boldsymbol{H}_{\mathrm{in}}, \boldsymbol{E}_{\mathrm{in}}/Z_0)$

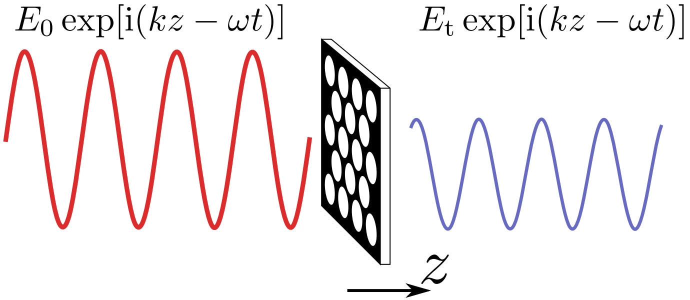
$$\rightarrow (\boldsymbol{E}'^{\pm}_{\mathrm{s}}, \boldsymbol{H}'^{\pm}_{\mathrm{s}}) = \pm(Z_0\boldsymbol{H}^{\pm}_{\mathrm{s}}, -\boldsymbol{E}^{\pm}_{\mathrm{s}}/Z_0)$$

($Z_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$, TT: 完全透過, TR: 完全反射)

片方が解けているともう一方は自動的に解ける

# バビネの原理とチェッカーボード

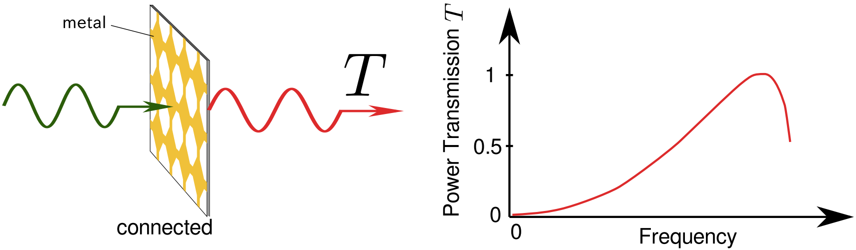
# 振幅透過率とパワー透過率




amplitude transmission $t = E_\mathrm{t}/E_0$

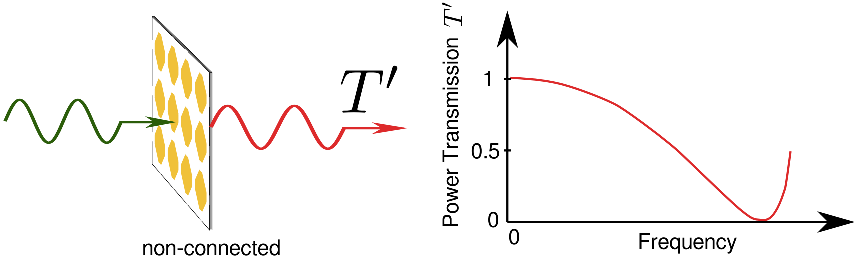
power transmission $T = |t|^2$

# 接続状態のチェッカーボードの透過スペクトル



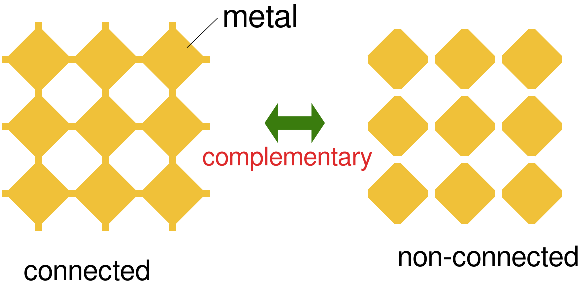

- 低周波数で完全反射

# 非接続状態のチェッカーボードの透過スペクトル




- 低周波数で完全透過

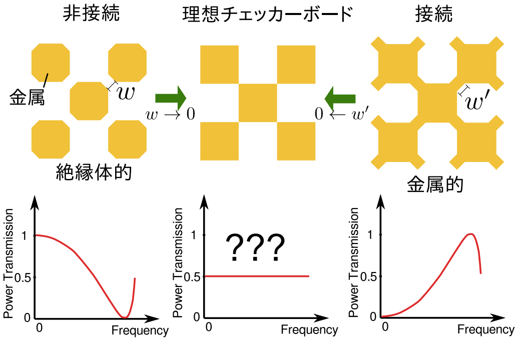
# 補対性




- 補対: 金属 ↔ 空隙の入れ替えで移り合う

ナイーブなバビネの原理: $T + T' = 1$
($T$: パワー透過率,
$T'$: 補対問題のパワー透過率)

# チェッカーボード構造の相転移

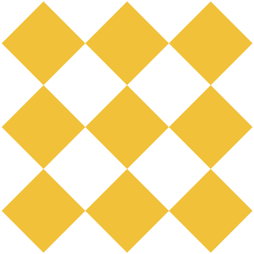



- 応答が劇的に接点状態に依る
- 接続状態の変化による “メタマテリアルの相転移”
  → 変調器への応用可能性

相転移の中間点を特徴付けることはできるだろうか?

# 理想チェッカーボード

自身と補対

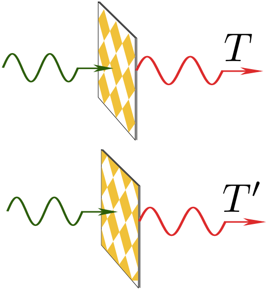


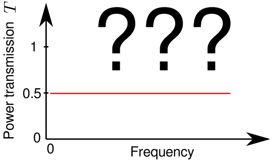
self-complementary

接続状態と非接続状態の間の臨界的構造

# 理想チェッカーボードのパワー透過率

- 理想チェッカーボード ($T + T' = 1$ and $T = T' \rightarrow T = T' = 1/2$):
  周波数無依存応答?





R. C. Compton *et al.*, Opt. Acta Int. J. Opt. 31, 515 (1984).

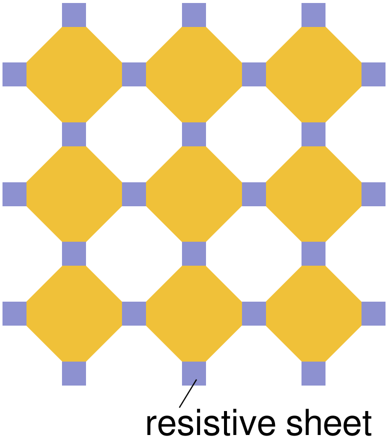
K. Takano *et al.*, Opt. Express 22, 24787 (2014).

# 疑問

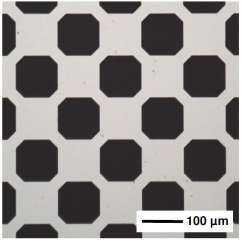
- チェッカーボードで周波数無依存応答をさせることはできるのか?
- 接続状態と非接続状態の中間状態はなにか?

# 抵抗を持つ中間状態

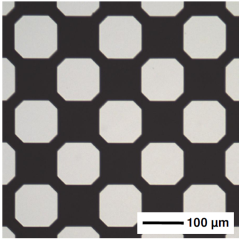
- 抵抗で臨界性をおさえる



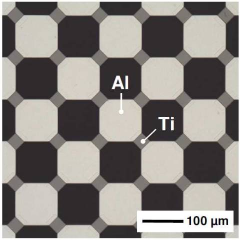
# 作製したサンプル




connected



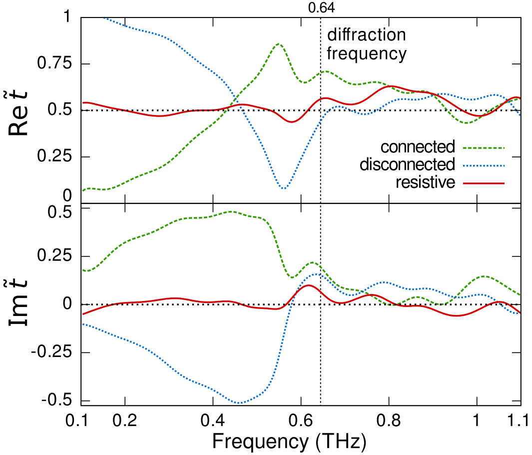

disconnected

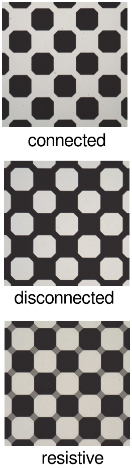



resistive

- c 面サファイア基板 (サンドイッチ)
- 金属: アルミ (400 nm)
- 抵抗体: Ti (19 nm, appropriately selected)

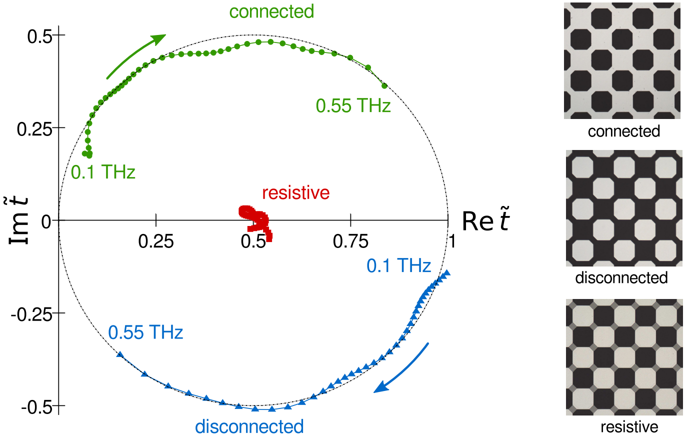
# 結果: 複素振幅透過率




Y. Urade, Y. N., T. Nakanishi, and M. Kitano, Phys. Rev. Lett. **114**, 237401 (2015).

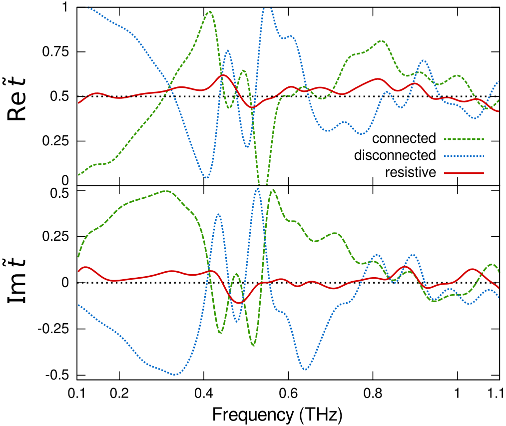
# 結果: 複素振幅透過率

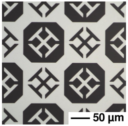



- パワー透過率 $T = |\tilde{t}|^2 \to$ 1/4 for resistive one!

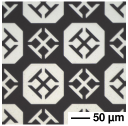
Y. Urade, Y. N., T. Nakanishi, and M. Kitano, Phys. Rev. Lett. **114**, 237401 (2015).

# 共鳴の消去

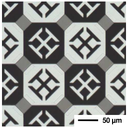


connected



disconnected



resistive

Y. Urade, Y. N., T. Nakanishi, and M. Kitano, Phys. Rev. Lett. **114**, 237401 (2015).

# 抵抗シートのモデル化: シートインピーダンス

$$\boldsymbol{E}_{\parallel}(x,y) = Z_{\mathsf{s}}(x,y)\boldsymbol{K}(x,y)$$

($V = RI$ の類似)

- $\boldsymbol{K}(x,y)$: 表面電流密度 ($\sim$ A/m)
- $\boldsymbol{E}_{\parallel}(x,y)$: 面内電場 ($\sim$ V/m)
- $Z_{\mathsf{s}}(x,y)$: シートインピーダンス ($\sim \Omega$)

金属・空隙の入れ替えを拡張する必要がある

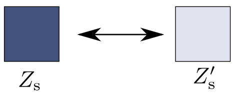
# $Z_0/2$ に関するインピーダンス反転

- 補対: $Z_\mathrm{s}$ の表面 $\rightarrow Z'_\mathrm{s}$ を持つ表面

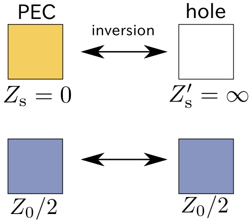
$$Z_\mathrm{s} Z'_\mathrm{s} = \left(\frac{Z_0}{2}\right)^2$$

  - $Z_0$: 真空のインピーダンス

・Impedance inversion

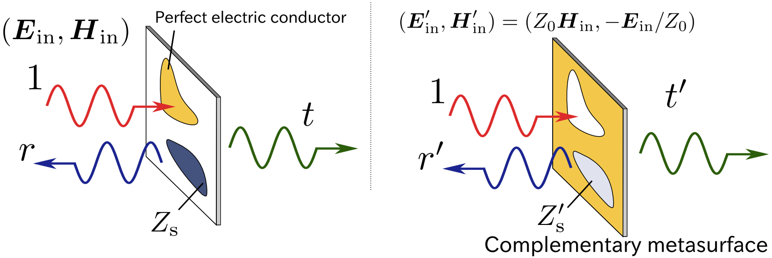



・Examples




C. E. Baum and H. N. Kritikos, editors, *“Electromagnetic Symmetry”* (Taylor & Francis, Washington, 1995).

# 抵抗体に対するバビネの原理



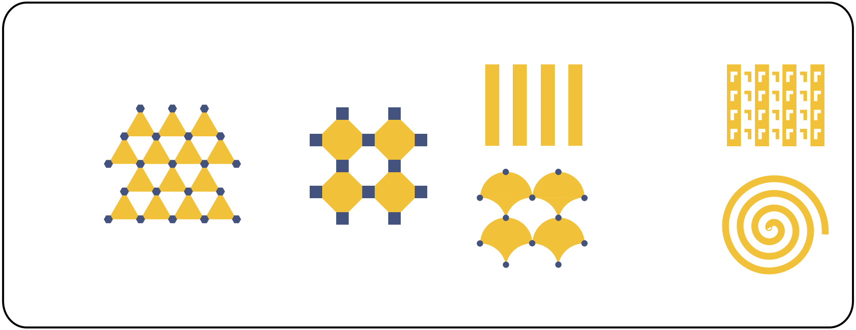

- 平面波入射
  - 入射電場 ↔ 入射磁場 (補対問題に対して)
- 偏光変換なしの複素振幅透過率: $t$, $t'$

## バビネの原理

$$t + t' = 1$$

# 自己補対メタ表面の例

自分自身の補対と合同



: Perfect electric conductor　: Resistive sheet with surface impedance $Z_0/2$

この対称性は合同変換に関するものとは異なる

# 周波数無依存の透過率

- 金属メタ表面は通常共鳴を示す
- 自己補対性は共鳴を取り除く

Proof sketch :

- 自己補対性 $\rightarrow t = t'$ (ある条件のもとで)
- バビネの原理 $t + t' = 1 \rightarrow t = t' = 1/2$
  $T = |t|^2 = |t'|^2 = 1/4$

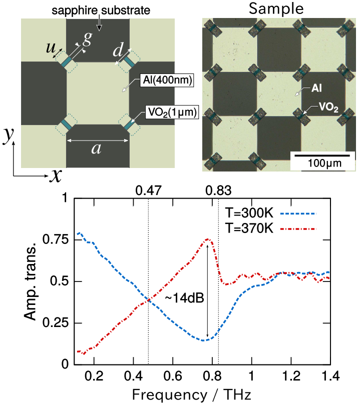
自己補対性 $\rightarrow$ 周波数無依存応答

Y. N., Y. Urade, T. Nakanishi, and M. Kitano, Phys. Rev. B **88**, 205138 (2013).

# 変調応用

# 動的変調子

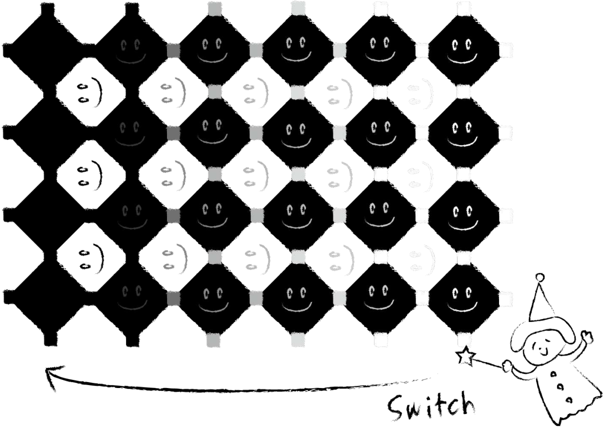
- c 面サファイア基板 (片側のみ)
- 金属: Al (400 nm)
  接点: $VO_2$ (1 μm)
- 基板の効果を補正
- $a = 75$ μm, $g = 5$ μm, $u = 15$ μm
  $d = 32$ μm




バンドパス・ストップの切替

Y. Urade, Y. N., *et al.*, Opt. Express **24**, 4405 (2016).

# 偏光操作に向けた拡張: 異方的切替




対称性: 自分の裏側がもとの 90 度回転になっている

# 異方的透過反転

- $t^{(\mathrm{off})} + t^{(\mathrm{on})} = 1$

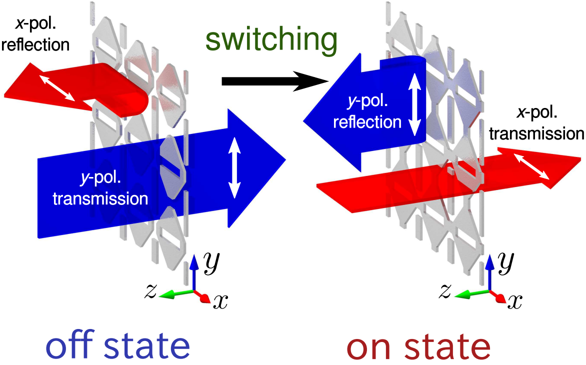
は前述の対称性の元で次のように拡張できる:

- $t_x^{(\mathrm{off})} + t_x^{(\mathrm{on})} = 1$
- $t_y^{(\mathrm{off})} + t_y^{(\mathrm{on})} = 1$

(直交偏光それぞれに対する透過反転)

# 動的偏光子への応用

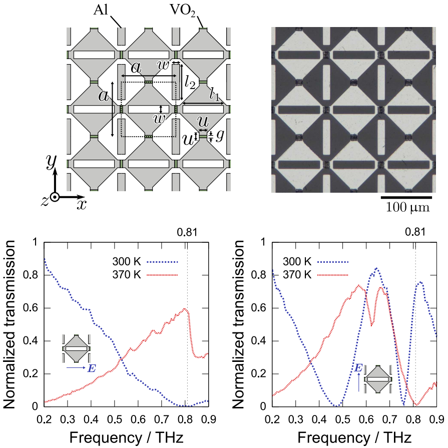
- $t_x^{\text{(off)}} + t_x^{\text{(on)}} = 1$
- $t_y^{\text{(off)}} + t_y^{\text{(on)}} = 1$




$t_x^{\text{(off)}} \sim 0$ and $t_y^{\text{(off)}} \sim 1$ $\rightarrow$ $t_x^{\text{(on)}} \sim 1$ and $t_y^{\text{(on)}} \sim 0$

# 実装

- c 面サファイア基板 (片側のみ)
- 金属: Al (400 nm)
  接点: $VO_2$ (1 μm)
- $a = 106\ \mu\mathrm{m}$, $u = w = 15\ \mu\mathrm{m}$,
  $g = 5\ \mu\mathrm{m}$, $l_1 = 80\ \mu\mathrm{m}$, $l_2 = 69\ \mu\mathrm{m}$
- 基板効果の補正済み



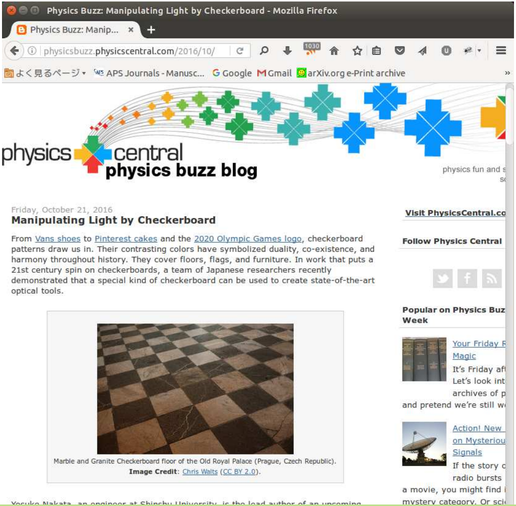

<u>Y. N.</u>, Y. Urade, *et al.*, Phys. Rev. Applied **6**, 44022 (2016).

# まとめ

- 電気回路の SUSY [Phys. Rev. A **93**, 43853 (2016)]
- 周波数無依存応答
  - 周波数無依存応答の観測
    [Phys. Rev. Lett. **114**, 237401 (2015).]
  - バビネの原理に基づく理論
    [Phys. Rev. B **88**, 205138 (2013).]
  - コヒーレント吸収によるエネルギーの局在化
    [Opt. Lett. **41**, 4472 (2016).]
- 変調器応用
  - Capacitive–inductive 切替
    [Opt. Express **24**, 4405 (2016).]
  - 動的偏光子
    [Phys. Rev. Applied **6**, 44022 (2016).]
  - 非対称透過の切替
    [EPJ Appl. Metamat. to be published (2017).]

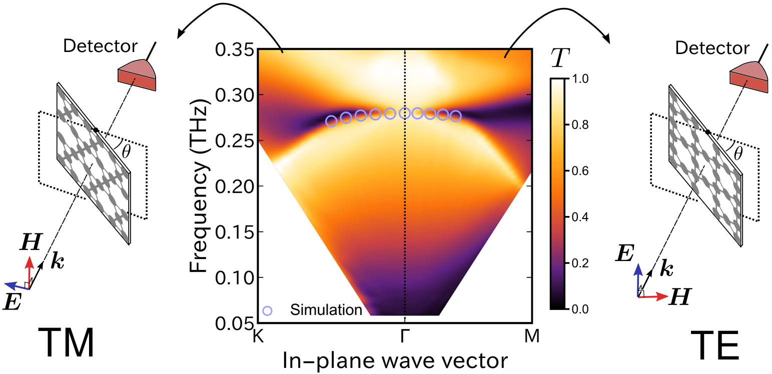
# Physics Buzz

"Physics Buzz" "checkerboard" で検索



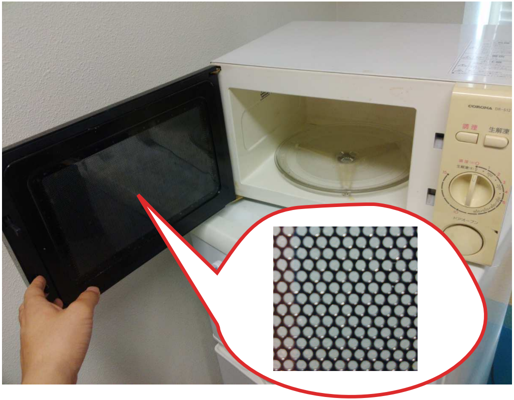
補足スライド

# カゴメ格子のフラットバンド



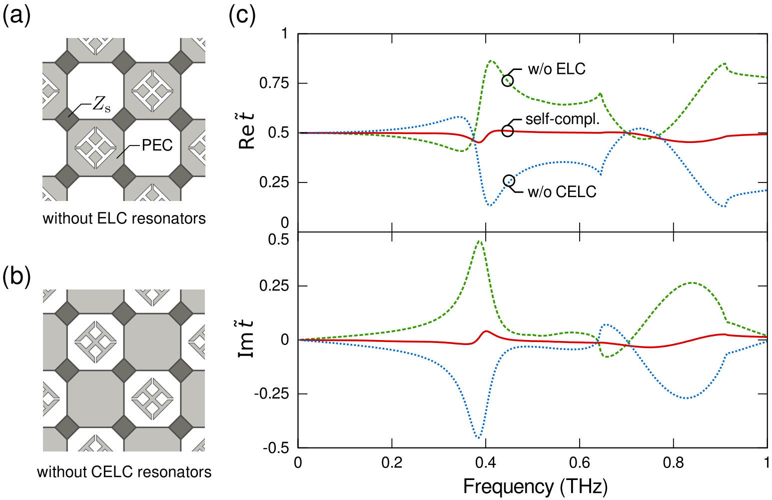
# 日常生活におけるメタ表面

# 日常生活におけるメタ表面２

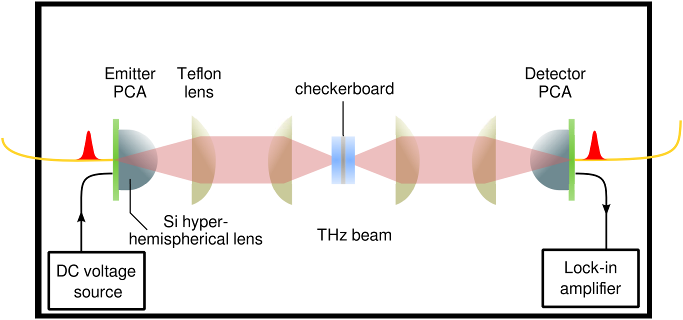


Connected Metal mesh
〇 Optical ×Microwave

# Self-complementarity → flat transmission?



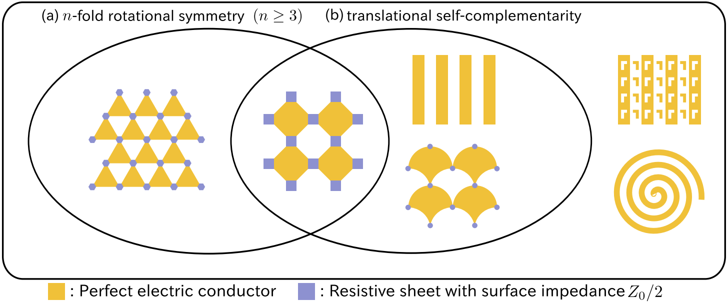
# 測定装置




- 垂直入射: 直線偏光 THz 波
- $\tilde{t}(\omega) = \tilde{E}(\omega)/\tilde{E}_{\mathrm{ref}}(\omega)$
  $\tilde{E}_{\mathrm{ref}}(\omega)$: サファイアのリファレンス信号

# 周波数無依存応答のための条件

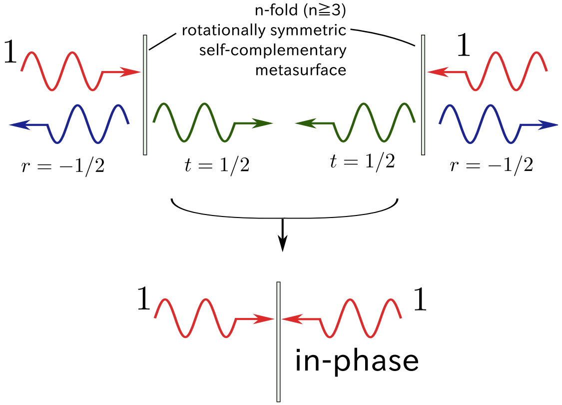
Self-complementary metasurfaces




- 自己補対メタ表面: 円偏光垂直入射
  - 回転型: 任意偏光垂直入射
  - 平行異動型: 円偏光斜め入射

Y. N., Y. Urade, T. Nakanishi, and M. Kitano, Phys. Rev. B **88**, 205138 (2013).

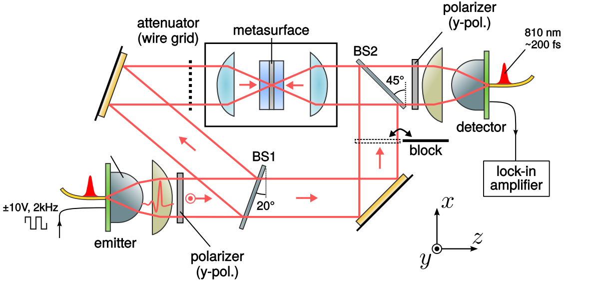
# コヒーレント完全吸収

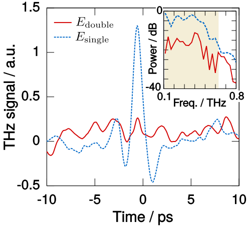


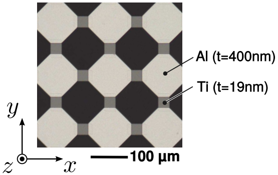

coherent perfect absorption

Y. N., Y. Urade, T. Nakanishi, and M. Kitano, Phys. Rev. B **88**, 205138 (2013).

# コヒーレント完全吸収の実験的実現




Y. Urade, Y. N., T. Nakanishi, and M. Kitano, Opt. Lett. **41**, 4472 (2016).

# Sufficient symmetry for extended inversion

(Impedance inverted off state) = ($\pi/2$-rotated on state)