第 6 回 QUATUO 研究会
高知工科大学 永国寺キャンパス
講演　2017 年 1 月 9 日

量子論とトポス

谷村 省吾
名古屋大学大学院情報科学研究科
（2017 年 4 月より情報学研究科に改組）

本講演では、量子論にトポスを導入する動機とトポス理論の基本概念について解説した。順序構造・束・量子論理・characteristic function・subobject classifier・空間性トポスなどを解説した。会場ではホワイトボードで板書しながら講演を行った。参考文献を以下に挙げる。また、甚だ不完全ではあるが、手書きノートを以降のページに添える。

参考文献：

[1] ヒューズ「量子論理」、別冊サイエンス『量子力学の新展開』pp.40-54 (1983) に所収（初出は Scientific American 1981 年 10 月号）：井元信之氏から指摘していただいて、この文献の存在を思い出しました。

[2] 竹内外史『層・圏・トポス』（日本評論社）：最近復刊されました。古典論理から直観論理への拡張という路線で書かれています。量子論とのつながりは意識されていないようです。トポスが古典論理の拡張概念だということはよくわかる本です。

[3] J. L. Bell, “Toposes and Local Set Theories” (Dover)：第 1 章がコンパクトにまとまった圏論の速習コースになっています。第 2 章まで読めばトポスの定義にたどりつけます。世の中では、topos の複数形は topoi と書かれることのほうが多いようです。

[4] 谷村省吾『理工系のためのトポロジー・圏論・微分幾何』（サイエンス社）：圏論に関して、もっともとっつきやすい教科書となることを目指して書かれた本です。トポスにはまったく触れていません。紙版は売り切れて、いまは電子版のみが販売されています。

[5] C. J. Isham and J. Butterfield, “Some Possible Roles for Topos Theory in Quantum Theory and Quantum Gravity,” arXiv:gr-qc/9910005：理論全体を構築しているわけではなく、だいたいのアイデアスケッチのような論文です。

[6] Andreas Döring and Chris Isham, “A Topos Foundation for Theories of Physics, I, II, III, IV,” J. Math. Phys. 49, 053515 (2008), arXiv 版：トポス量子論の決定版とも言える 4 部作の論文。I がトポスについてのイントロで、II がトポス量子論。

[7] Kunji Nakayama, “Topos-theoretic extension of a modal interpretation of quantum mechanics,” Int. J. Theor. Phys. 47, 2065 (2008); K. Nakayama, “Topologies on quantum topoi induced by quantization”, J. Math. Phys. 54, 072102 (2013); K. Nakayama, “Topos quantum theory on quantization induced sheaves”, J. Math. Phys. 55, 102103 (2014); K. Nakayama, “Topos quantum theory reduced by context-selection functors”, J. Math. Phys. Volume 57, 122103 (2016)：中山薫二氏（龍谷大学）による 4 編の論文。私は読みこなせていませんが、日本人によるトポス量子論の研究論文として古賀実君に教えてもらいました。

[8] Cecilia Flori, “Lectures on Topos Quantum Theory,” arXiv:1207.1744 : この方はトポス量子論についての解説論文をいくつか書いています。

[9] John von Neumann, “John von Neumann: Selected Letters”, Miklós Rédei (Editor), (American Mathematical Society) : フォンノイマンがいろいろな人に宛てた手紙と編者による解説集。p.59 以降にバーコフに宛てた手紙が収められています。この手紙の中で、フォンノイマンは、バーコフが提案したモジュラー法則（という名前はまだ付けられていない）に興味を示し、量子力学のヒルベルト空間による定式化を絶対的なものだとは思っていないという見解を告白しています。その部分を次のページに書き写します。谷村自身は、この手紙の、この記述の存在を北野正雄氏から教えていただきました。

Letters to G. Birkhoff,

Nov. 13, Wednesday, [1935?]

Dear Garrett,

Many thanks for your letter. Your idea of requiring $a \leq c \longrightarrow a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap c$ in Hilbert space for the finite a, b, c only is very interesting, but will it permit to differentiate between Hilbert-space and other Banach-spaces?

I would like to make a confession with may seem immoral: I do not believe absolutely in Hilbert space any more. After all Hilbert-space (as far as quantum-mechanical things are concerned) was obtained by generalizing Euclidean space, footing on the principle of "conserving the validity of all formal rules". This is very clear, if you consider the axiomatic-geometric definition of Hilbert-space, where one simply takes Weyl's axioms for a unitary-Euclidean-space, drops the condition on the existence of a finite linear basis, and replaces it by a minimal of topological assumptions (completeness + separability). Thus Hilbert-space is the straightforward generalization of Euclidean space, if one considers vectors as the essential notions.

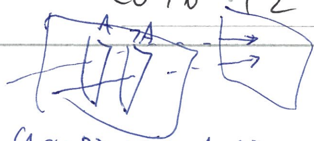
Now we begin to believe, that it is not the vectors which matter but the lattice of all linear (closed) subspaces. Because ...

Quotation from "John von Neumann: Selected Letters" edited by Miklós Rédei published from American Mathematical Society in 2005, p.59.

動機　量子論の基礎付け、量子論をリカイしたい。
量子力学の標準的定式化 : Hilbert space と operators.　「さまざまないろいろんの源泉
これが物理的正体不明, state vector って何? シュレディンガーの猫, 確率解釈, 波動の収縮
Hilbert space によらない formulations が欲しい
・path integral,　・C*-algebra　・quantum logic　・topos

No. 0-1

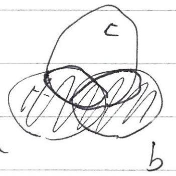
第6回 QUATUO 研究会に向けて準備　谷村省吾　2016.12.27



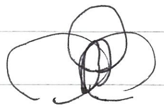
なぜ論理を変更するのか?　古典論理 (Bool) 排中律 $\{ A \vee (\neg A) = 1,\ A \wedge (\neg A) = 0 \}$
分配律 $(A \vee (\neg A)) \wedge B = (A \wedge B) \vee (\neg A \wedge B)$　量子論ではダメ

量子論とトポス

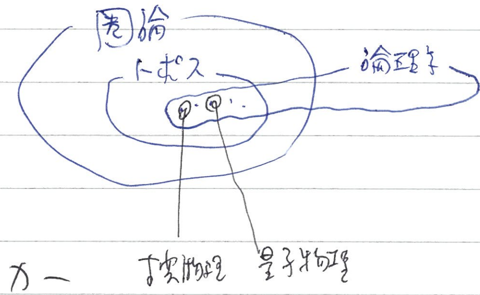
古典論理　ブール束 $L = \{a, b, c, \dots\}$
順序構造 $a \leq b$　「a ならば b」と解釈される。
連言 conjunction $a \wedge b$　交



分配律 $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$
$(a+b) \cdot c$
$(a \wedge b) \vee c$ −



分配律を捨てる → Q.L.
中排律を捨てる → 直観論理 トポス



量子論理　分配律が成り立たない。
von Neumann, Birkhoff, 伏見

量子力学 — 不確定性関係
— 文脈依存性 [コッヘンスペッカー, ベル
↓
観測していないときの物理量の値 について語ってはいけない
を代数演算してはいけない。
は不確定であるだけでなく
実在していると思ってはいけない

力学の構文
系　system
状態　state
物理量　observable
値　value
運動法則　dynamics, transformation

古典力学系 — 可換代数 (物理量が) — すべての物理量が一斉に値を持っていると考えてよい。

Gelfand-Naimark duality
C*algebra　　Topological space
$A \rightsquigarrow Sp(A)$
$C_0(X) \leftsquigarrow X$
adjunction, duality

Bool 代数 — Stone の表現定理

abstract な代数 $\xleftarrow{\text{関数環の抽象化. } \cancel{\text{関数環}}}$ underlying space

$\xrightarrow[\text{表現}]{}$

可換代数　　　　~~まとも~~ 素朴な空間, 幾何学

非 〃　　　　非可換幾何学.

確率解釈　Riesz - Radon - Markov の表現定理.

状態概念

可換なもの = 文脈.

論理の拡張

真理値　$\{0, 1\}$　古典論理

$\mathbb{P}(\mathcal{H})$　量子論理

subobject classifier　Ω　トポス　su

トポスの定義　Grothendieck,

圏論

・トポス量子論　Isham, Butterfield, Döring

それで何がわかる?

logic と algebra は相性が悪い.

~~キーワード~~ 目次　動機

束論と順序　dan.

圏論を軸に〉 量子論 ~~[illegible]~~　C^*-algebra, ~~[illegible]~~ Gelfand - Naimark duality

トポス　subobject classifier と charcteristic function

Riesz - Radon - Markov

$A \times B \to C$

$A \to (B \to C)$

No. 1-1

2016 · 12 · 28 (　　　)

preorder　partial order　semiorder

たんなる順序 〃　total order

前順序　半順序　全順序

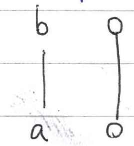
順序構造 と 論理

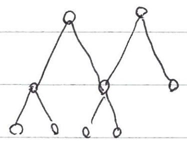
<u>Def</u> 順序　X : 集合

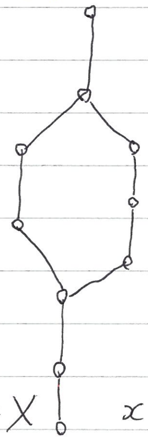
$\leqslant$: 2項関係

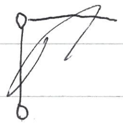
1) 反射律 (reflexive law)　$\forall a \in X$, $a \leqslant a$
2) 推移律 (transitive law)　$a \leqslant b$ かつ $b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$
3) 反対称律 (antisymmetric law)　$a \leqslant b$ かつ $b \leqslant a \Rightarrow a = b$
4) 全順序性 (total order)　$\forall a, \forall b \in X$ について $a \leqslant b$ または $b \leqslant a$

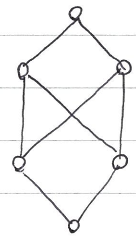
とくに「$a \leqslant b$ かつ $a \neq b$」のことを $a < b$ と書く.　$a \leqslant b$ のことを $b \geqslant a$ とも書く.

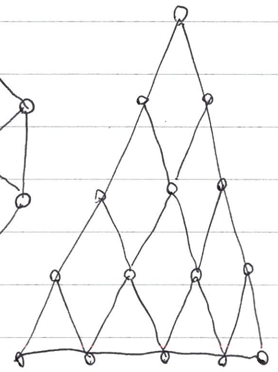
$a \leqslant b$ のことを  と書く.











$(X, \leqslant)$ において

<u>Def</u>　$a \in X$ が 最大元 $:\Longleftrightarrow$ $\forall x \in X$　$x \leqslant a$

$a \in X$ が 最小元 $:\Longleftrightarrow$ $\forall x \in X$　$a \leqslant x$

<u>定理</u> 半順序集合 では 最大元 はあれば 一意的. 最小元 〃

例

$\mathbb{N}$　自然数全体の集合　最小元がある　最大元はない

$\mathbb{Z}$　整数　最小・最大がない

$\mathbb{Q}$　有理数　$a \neq b$, $a \leqslant b$ のとき 必ず $\exists c \in \mathbb{Q}$　$a \neq c$, $c \neq b$, $a \leqslant c \leqslant b$

$\mathbb{R}$　実数

例　X : 集合

$\mathcal{P}(X)$: X の部分集合全体　X のベキ集合 (power set)

$A, B \subset X$ に対して

$A \leqslant B$ $:\Longleftrightarrow$ $A \subseteq B$

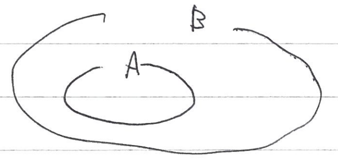
と定めると $\mathcal{P}(X)$ は 半順序集合.

論理との結びつき.

$A \subseteq B$ を「A ならば B」と解釈する

「$x \in A$ ならば $x \in B$」

「x が 正三角形 ならば x は 二等辺三角形」



Def 上限と下限

半順序集合 X の部分集合 A について

A の上界 $:= \{ x \in X \mid \forall a \in A,\ a \leq x \}$

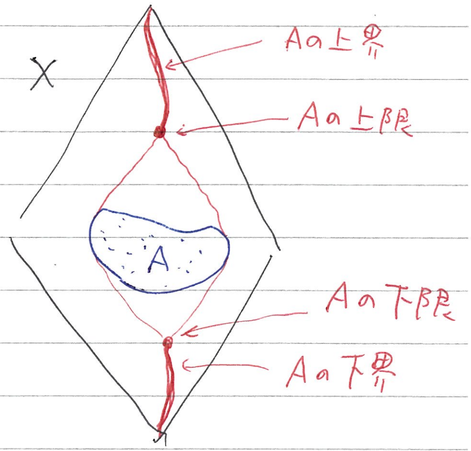
A の下界 $:= \{ x \in X \mid \forall a \in A,\ x \leq a \}$

supremum　　least upper bound

A の上限 $= \sup A :=$ 最小上界（あれば）

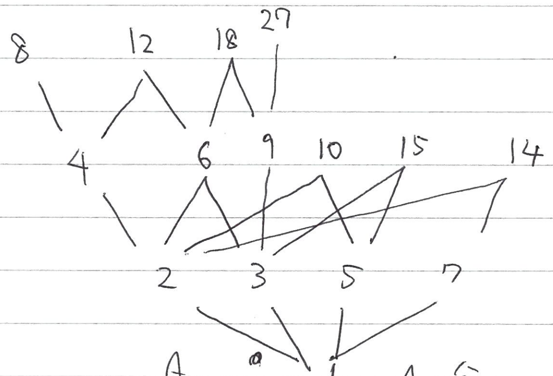
infimum　　greatest lower bound

A の下限 $= \inf A :=$ 最大下界（あれば）



例. $\mathbb{N}$ において

$a \leq b \ :\Longleftrightarrow\ b$ は a で割り切れる



$a \in \mathbb{N}$ の上界 $=$ a の倍数

$a \in \mathbb{N}$ の下界 $=$ a の約数.

~~a∈X~~ A の上界 $=$ A の公倍数,

A の下界 $=$ A の公約数

この世界では $\sup A$ $=$ A の最小公倍数

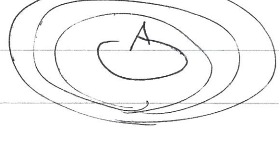
$\inf A$ $=$ A の最大公約数

例 $\mathcal{P}(X)$　$A, B \subset X$　$A \subseteq B$ のことを $A \leq B$ と書く.

{1,2…6}

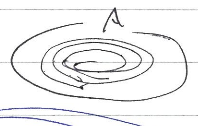
A の上界 $= \{ C \subset X \mid A \subseteq C \}$

A の下界 $= \{ C \subset X \mid C \subseteq A \}$



{1,2345} …

$\{A, B\}$ の上界 $= \{ C \subset X \mid A \subseteq C$ かつ $B \subseteq C \}$



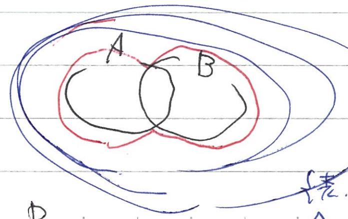
{1,2,3,4}

$\{A, B\}$ の上限 $= A \cup B = \sup\{A, B\}$

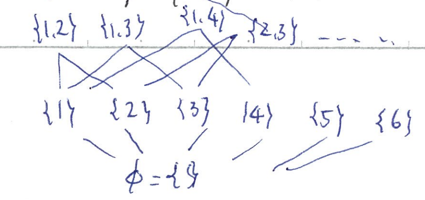
{1,2,3}　{1,3,4}

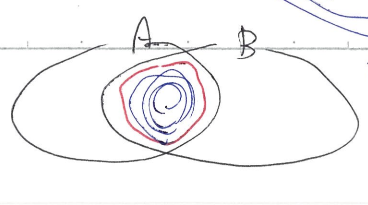
$\{A, B\}$ の下界 $= \{ C \subset X \mid C \subseteq A$ かつ $C \subseteq B \}$

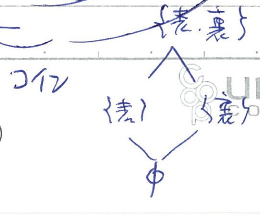
$\{A, B\}$ の下限 $= \inf\{A, B\} = A \cap B$



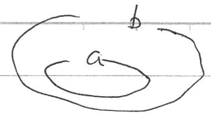
例. サイコロの目







~~束~~ $a \leq b$ のことを「a ならば b」と~~解~~解釈する.



$$a \Rightarrow b$$

Def 束 (lattice)

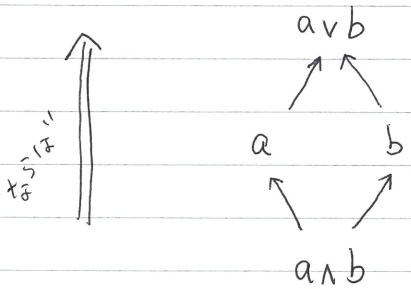
L：半順序集合で

任意の $a, b \in L$ に対して

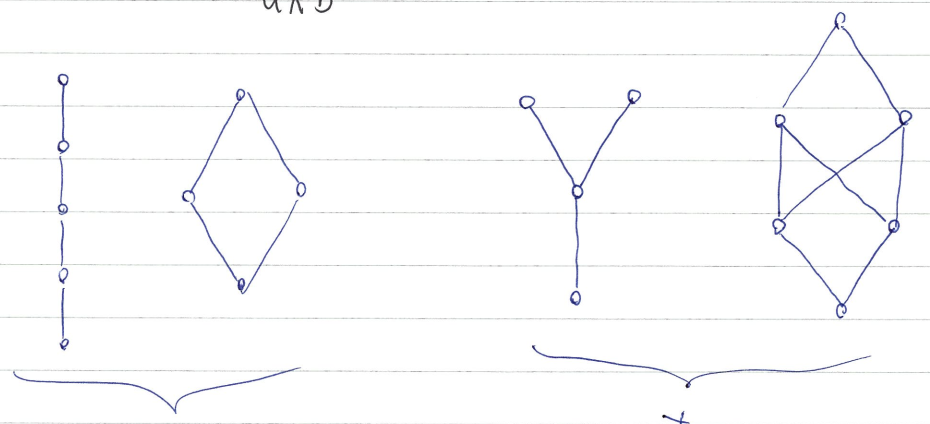
$\sup\{a,b\} = a \vee b$ （選言, disjunction, join）「または」

$\inf\{a,b\} = a \wedge b$ （連言, conjunction, meet）「かつ」

が存在する.



例



とくに束 L の最大元があれば 1 と書く. 最小元があれば 0 と書く.

Theorem

1) 可換律 $a \vee b = b \vee a$

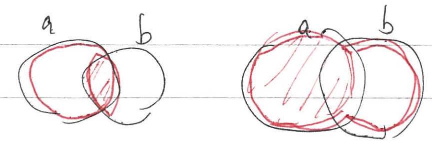
$a \wedge b = b \wedge a$

2) 結合律 $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$

$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$

3) 吸収律 $(a \wedge b) \vee a = a$

$(a \vee b) \wedge a = a$



4) ベキ等律 $a \vee a = a$

$a \wedge a = a$

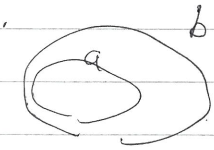
Theorem

join meet

法則1-3 が成り立つ演算規則 $\vee$, $\wedge$ が与えられたとき、

$$a \vee b = b \iff a \wedge b = a$$

このとき $a \leq b$ と定めれば L は半順序で束になる.



束の2通りの見方
- 順序 $\leqq$ … 推論規則を重視
- 代数 $\vee$, $\wedge$ … 命題論理演算を重視

Def 分配束 (distributive lattice)

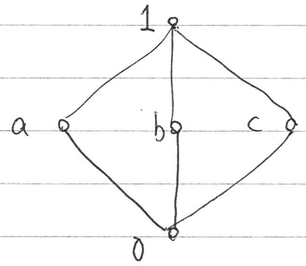
束 L において任意の元に対して

分配律 i) $(a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$ 　　 $(a+b)c = ac+bc$

ii) $(a \wedge b) \vee c = (a \vee c) \wedge (b \vee c)$

が成り立つ

例. これは分配束ではない



Theorem 一般の束において

$$(a \vee b) \wedge c \geqq (a \wedge c) \vee (b \wedge c)$$
$$(a \wedge b) \vee c \leqq (a \vee c) \wedge (b \vee c)$$

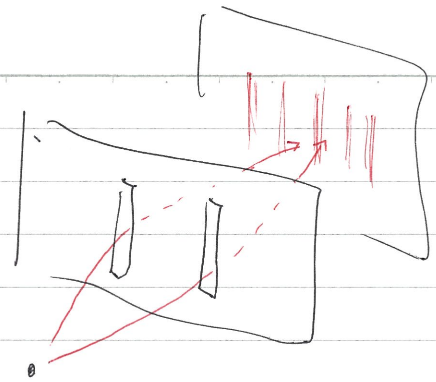
Theorem 分配束において

$a \vee b = a \vee c$ かつ $a \wedge b = a \wedge c$ ならば $b = c$

証明
$$\begin{aligned}
b &= (a \vee b) \wedge b \\
&= (a \vee c) \wedge b \\
&= (a \wedge b) \vee (c \wedge b) \\
&= (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \\
&= (a \vee b) \wedge c \\
&= (a \vee c) \wedge c \\
&= c.
\end{aligned}$$

量子論理

分配律が成り立たない.



$P_{スクリーン}$ $P_{左スリット}$ $P_{右スリット}$

$P_{スクリーン} P_{左スリット} |\psi\rangle$ = 粒子はスクリーンに当たる.

$P_{スクリーン} P_{右スリット} |\psi\rangle$ = 〃

$P_{スクリーン} (P_{左} + P_{右}) |\psi\rangle$ = 粒子はスクリーン上に届かない(暗縞)

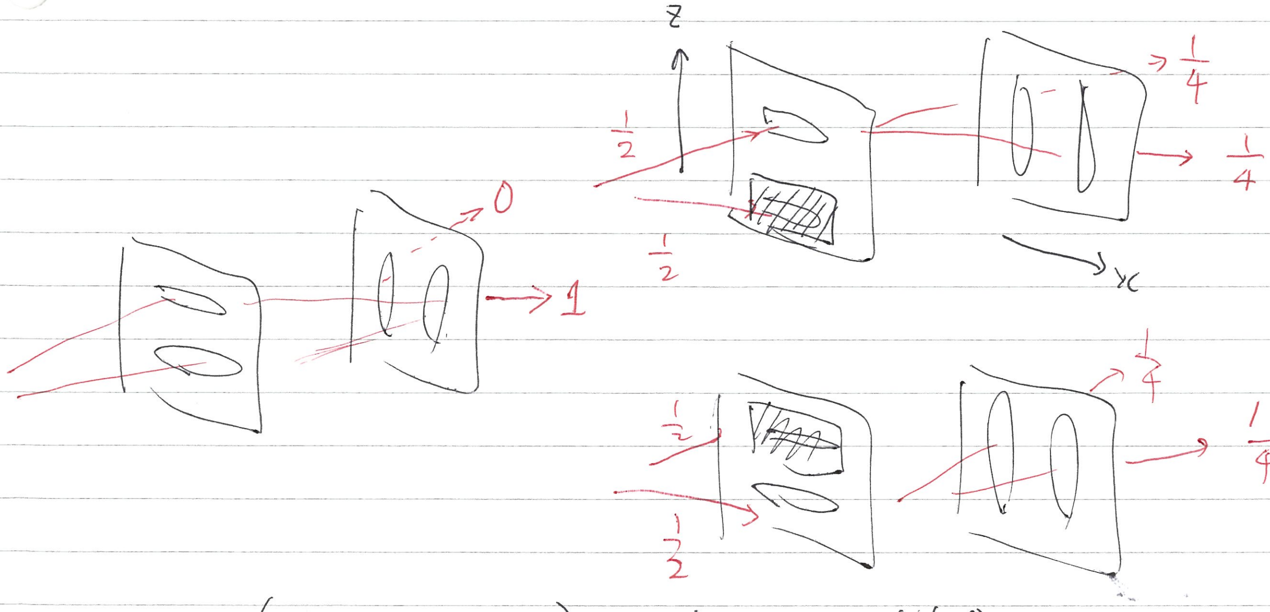
あるいは

$$P_{x\uparrow} \left(P_{z\uparrow} + P_{z\downarrow} \right) \underbrace{|x\uparrow\rangle}_{} = 確率\ 1 \qquad |x\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|z\uparrow\rangle + |z\downarrow\rangle\right)$$

$$P_{x\downarrow} \left(\quad 〃 \quad \right) |x\uparrow\rangle = 0$$

$$P_{x\uparrow} P_{z\uparrow} |x\uparrow\rangle = 確率\ \frac{1}{4}$$

$$P_{x\uparrow} P_{z\downarrow} |x\downarrow\rangle = \frac{1}{4}$$



(z↑ または z↓) = 確率 1 = 恒真命題.

(z↑ かつ x↑) または (z↓ かつ x↑) = 確率 1 にならない.

量子論理の束

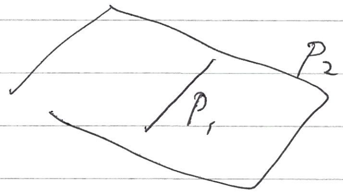
$L(\mathcal{H})$ Hilbert space $\mathcal{H}$ の射影作用素全体の集合.

$a, b \in L$

$a \leq b$:⟺ αが定

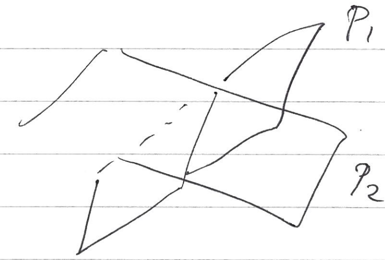
$P_{a_1}, P_{b_2} \in L(\mathcal{H})$

$P_{a_1} \leq P_{b_2}$:⟺ $\mathrm{Im}\, P_1 \subseteq \mathrm{Im}\, P_2$



$P_1 \wedge P_2$ = P_1 と P_2 の共通部分への射影

$P_1 \vee P_2$ = P_1 と P_2 が張る空間への射影



例) $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2$

$P_{z\uparrow} = |z\uparrow\rangle\langle z\uparrow|$ $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$空間 $\quad P_{z\downarrow} = |z\downarrow\rangle\langle z\downarrow|$ $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$空間 $\quad P_{x\uparrow} = |x\uparrow\rangle\langle x\uparrow|$ $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$空間

$P_{z\uparrow} \wedge P_{z\downarrow} = 0 \qquad P_{x\uparrow} \wedge P_{z\uparrow} = 0$

$P_{z\uparrow} \vee P_{z\downarrow} = 1 \qquad P_{x\uparrow} \wedge P_{z\downarrow} = 0$

$P_{x\uparrow} \wedge (P_{z\uparrow} \vee P_{z\downarrow}) = P_{x\uparrow}$

$(P_{x\uparrow} \wedge P_{z\uparrow}) \vee (P_{x\uparrow} \wedge P_{z\downarrow}) = 0 \vee 0 = 0.$

} 分配律は成り立たない.

例) $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$

$$P(x \in [a, b]) = \int_a^b |x\rangle\langle x|\, dx$$

$$P(p \in [c, d]) = \int_c^d |p\rangle\langle p|\, dp$$

Yes/No question 全体の集合 = 射影演算子全体の集合.

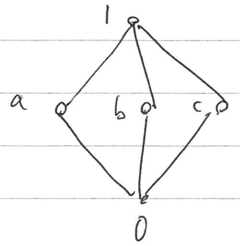
Def 相補束 (complemented lattice)

L：束（＝半順序集合で任意の2元の上限・下限がある）
が最大元 1 と最小元 0 を持つとする。
任意の元 $a \in L$ に対し、

$$a \vee a' = 1, \qquad a \wedge a' = 0$$

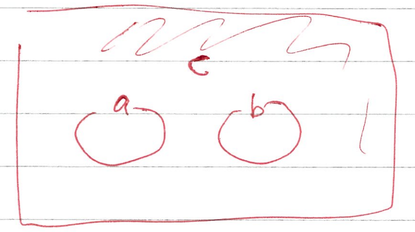
となるような $a' \in L$ があれば a' を a の補元 (complement) という。
任意の $a \in L$ に補元 $a' \in L$ が存在するような L を束補元という。

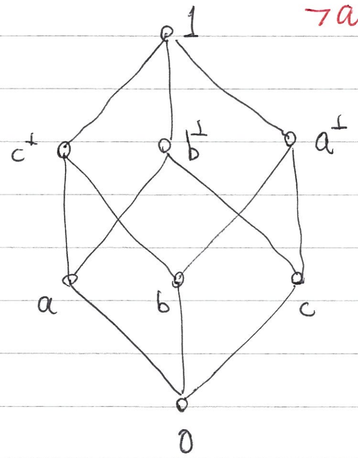
注 補元は一意的とは限らない
分配束では補元はあれば一意的である。

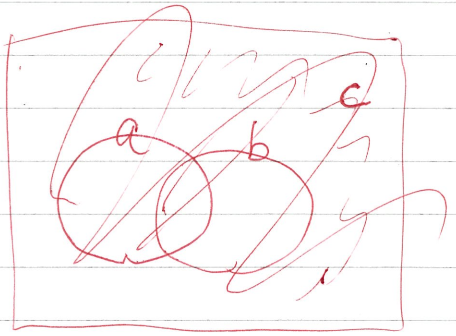


Def ブール束 または ブール代数 (Boolean lattice
分配束 かつ 相補束 のこと。
(ブール束においては補元は一意的に存在する
a の補元を $a^{\perp}$ と書く)
$\neg a$ (aの否定, negation) とも書く。

ブール束の例







~~例 コインの束~~

例 $\mathbb{P}(X)$ において

$$A \subseteq X \text{ の補元 } A^{\perp} := A^{c} = \{x \in X \mid x \notin A\}$$

と定めると、$\mathbb{P}(X)$ はブール束。
例 コインの束，サイコロの束

ブール束は 測度論・確率論の ボレル集合族に似ている。
σ-完備ブール束

Def 直相補束 (ortho.complemented lattice)
$1, 0$ を持つ束 L の各元 a の補元 $a^{\perp}$ が定まり
1) $a \leq b \Rightarrow b^{\perp} \leq a^{\perp}$
2) $(a^{\perp})^{\perp} = a$
が成り立てば L を直相補束という。

量子論理は分配束ではないのでブール束ではない.
しかし

$P \in L(\mathcal{H})$ に対し

$P^{\perp} := (\mathrm{Im}\, P)$ の直交補空間への射影

と定めると, $P \vee P^{\perp} = 1$, $P \wedge P^{\perp} = 0$ が成立.
~~$L(\mathcal{H})$ は 直相補束~~

Def

束 L が モジュラー束 (modular lattice) であるとは,
任意の $a, b, c \in L$ について

$$a \leq b \Rightarrow (a \vee c) \wedge b = a \vee (c \wedge b)$$

が成り立つこと.

(これは分配律
$(a \vee c) \wedge b = (a \wedge b) \vee (c \wedge b)$
を $a \leq b$ に限定して述べた形になっている.)

直相補束 L が オーソモジュラー束 (ortho-modular lattice) であるとは
任意の $a, b \in L$ について

$$a \leq b \Rightarrow b = a \vee (a^{\perp} \wedge b)$$

が成り立つ.

Theorem

$L(\mathcal{H})$ は モジュラー束 かつ オーソモジュラー束 (type I)

type III の von Neumann alg の 射影作用素全体がなす束 L は
オーソモジュラー束であるが
モジュラー束ではない.

Def von Neumann algebra $\mathcal{M}$

$\mathcal{H}$: Hilbert space
$B(\mathcal{H})$: $\mathcal{H}$ 上の有界作用素全体
$\mathcal{M} \subset B(\mathcal{H})$ *-部分環
$\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$

$\mathcal{A} \subset B(\mathcal{H})$ 部分集合
$\mathcal{A}' := \{X \in B(\mathcal{H}) \mid {}^\forall A \in \mathcal{A}, [A, X] = 0$ かつ $[A, X^*] = 0\}$
$\mathcal{A}$ の可換子環
commutant

($\mathcal{M}$ は 作用素の弱位相に関して閉
$\underset{n\to\infty}{\text{w-lim}}\, T_n = T \iff {}^\forall v, {}^\forall w \in \mathcal{H}\ \lim_{n\to\infty} \langle w | T_n | v \rangle = \langle w | T | v \rangle$)

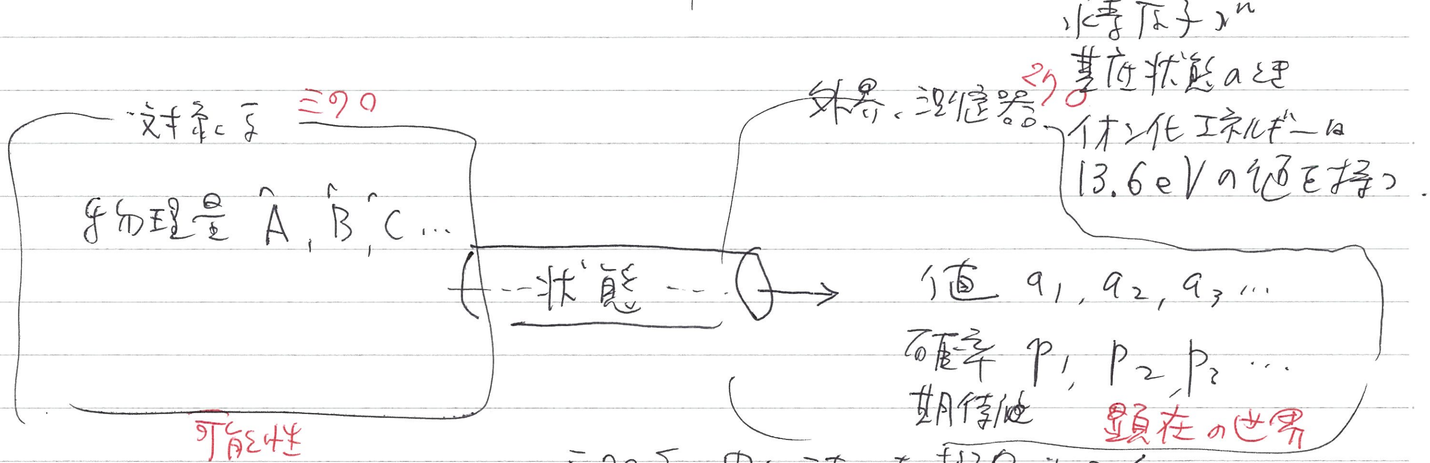
$\mathcal{A}''' = \mathcal{A}'$

$\mathcal{A}'' \supseteq \mathcal{A}$

◎力学の記述形式

力学の構文

系 system	Aという系が	例 144gのボールが
状態 state	Bという状態のとき	120km/hで飛んでいるとき
物理量 observable	Cという物理量が	運動エネルギーは
値 value	Dという値を持つ	80Jの値を持つ
運動・変換 dynamics, transformation		



ミクロ系の内にこもった概念ではなく、
状態は ミクロ系とマクロ系の境界、インターフェイスだ。

量子力学の特徴

1) 分配律が成り立たない

（測ったときは z↑ または z↓ であっても 測っていないときに分配律は成り立たない）

2) 不確定性関係　すべての物理量の値を一斉に確定させることはできない（2つの非可換物理量でも）

3) 文脈依存性

Kochen-Speckerの定理

Bell-Clauser-Horne-Shimony-Holtの不等式

（測っていない物理量の値が実在していると思ってはいけない。
測っていないときも同様にあると仮定して代数演算してはいけない）

Kochen-Specker

$\mathcal{H}=\mathbb{C}^3$ 上の可換な演算子の組 $\{(\hat{A}_1,\hat{A}_2,\hat{A}_3)\ (\hat{B}_1,\hat{B}_2,\hat{B}_3)\cdots\}$
で一斉に値を割りあてることができないものが存在する

$e_1, e_2, e_3 \in \mathbb{R}^3$ 規格直交系

$$J_x=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix}\qquad J_y=\begin{pmatrix}0&0&i\\0&0&0\\-i&0&0\end{pmatrix}\qquad J_z=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\mathbb{J}=(J_x, J_y, J_z)$$

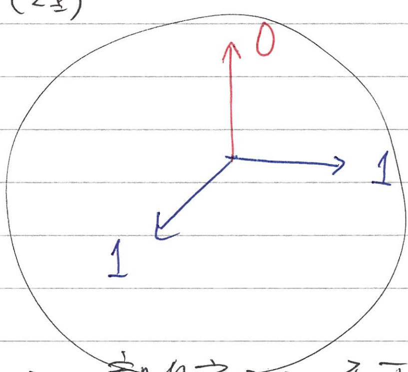
固有値は $-1, 0, 1$

$$J_{e_1}=\mathbb{J}\cdot e_1\qquad J_{e_2}=\mathbb{J}\cdot e_2\qquad J_{e_3}=\mathbb{J}\cdot e_3$$

$$A_{e_1}=(J_{e_1})^2\qquad A_{e_2}=(J_{e_2})^2\qquad A_{e_3}=(J_{e_3})^2$$

$A_{e_1}\ A_{e_2}\ A_{e_3}$ → 固有は 1 (2重) または 0, 可換, 同時対角化可能

$$A_{e_1}+A_{e_2}+A_{e_3}=2$$



SO(3) 全体にこの割り当ては不可能.

B-CHSH

$\mathcal{H} = \mathbb{C}^4$ 上 $\qquad$ ~~$A \otimes B$~~ $\qquad \boxed{A \text{ or } B} \otimes \longleftarrow 20 \longrightarrow U \text{ or } V$

$= \mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$ $\qquad\qquad\qquad\qquad \pm 1 \qquad\qquad\qquad \pm 1$

$[A, U] = 0 \qquad [B, U] = 0$

$[A, V] = 0 \qquad [B, V] = 0$

$$S = AU + AV + BU - BV$$
$$= A(U+V) + B(U-V)$$

A, B, U, V に同時に ±1 の値が割り当てられるなら $S = -2, 0, +2$
または または

$-2 \leq \langle S \rangle \leq 2$.

量子力学では $-2\sqrt{2} \leq \langle S \rangle \leq 2\sqrt{2}$ で かつ 等号も達成できる。

No. 2-4

C^*-alg $\xrightarrow[表現]{具体化}$ $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ $\xrightarrow[行列表示]{基底}$ $M(n,\mathbb{C})$, ~~$M(\infty)$~~, $\mathbb{B}(\mathbb{C}^n)$, $\mathbb{B}(\ell^2)$, $\mathbb{B}(L^2(\mathbb{R}^n))$

よりいっそうアブストラクトに
抽象化

古典力学 — 物理量が可換代数をなす — すべての物理量が一斉に値を持っている とみてよい。

evaluater
$\shortparallel$
character 指標 $\chi : A \to \mathbb{C}$ $*$-準同型
$\shortparallel$
極大イデアル

Gelfand-Naimark duality.

可換 C^*-algebra 　　　 位相空間

$C_0(X) \leftsquigarrow X$

$A \rightsquigarrow Sp(A)$

adjunction, duality

$\mathbb{C}$ という要(かなめ)の C^*-alg

Stoneの表現定理

questionに対する evaluator
$\shortparallel$
character $\chi : L \to \{0,1\}$ $\wedge\vee$-準同型
$\shortparallel$
極大イデアル

Bool代数 $\rightsquigarrow$ Stone空間

$\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$ という要のBool alg

$$\boxed{抽象代数 \underset{表現}{\overset{~~環~~ 関数環}{\leftrightsquigarrow}} \text{underlying space}}$$

可換代数 $\xleftrightarrow{同等}$ 素朴な空間、幾何学
非〃 $\longleftrightarrow$ 非可換幾何学.

確率解釈 　Riesz-Radom-Markovの表現定理
状態 = 期待値汎関数 = 可換 C^*-alg への線形準同型射で
~~連続~~、~~規~~ 非負 規格化

可換な部分代数 = 文脈.

古典論と量子論を包括する体系はいかなるものか？

古典論理 … Yes/No 真 or 偽 true/false 1 or 0

各命題は真であるか偽であるかのどちらか.

$[\![$3は偶数である$]\!] = 0$ $[\![$12は3で割り切れる$]\!] = 1$

量子論理 … $L(\mathcal{H})$

$P = [\![$電子の位置は $a \leq x \leq b$ のどこかである$]\!] = \int_a^b |x\rangle\langle x| dx$

$[\![$電子のスピンはz軸上向き$]\!] = |z\uparrow\rangle\langle z\uparrow|$.

$[\![\cdots]\!]$ で「…」という命題の真理値を表す.

命題 A の"正しさ"は射影演算子 $P = [\![A]\!]$ で表わされる

$0 \leq P \leq 1$.

量子論

真理値概念を拡張すれば包括的体系になるのではなかろうか？

$\downarrow$ Ω subobject classifier

$\downarrow$ トポス topos

真理値

2値 $\xrightarrow{\text{拡張}}$ 多値

グレーゾーンを設ける.

排中律が成り立たなくなる. $A \vee (\neg A) = 1$ が

直観論理 $\neg(\neg A) = A$ が言えない

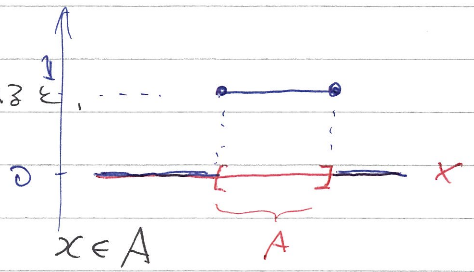
$A \Rightarrow \neg(\neg A)$ は言えるが

$\neg(\neg A) \Rightarrow A$ が言えない.

トポスの考え方.

古典論理 $\Omega = \{0, 1\} = \{\mathrm{No}, \mathrm{Yes}\}$

集合 X の部分集合 A $(A \subseteq X)$ が与えられると、



$$\chi_A : X \longrightarrow \Omega$$

$$x \longmapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

が定められる. χ_A を A の特性関数 (charcteristic function) という。

逆に、関数 $\chi : X \longrightarrow \Omega$ が与えられれば、

$$A_\chi := \chi^{-1}(1) = \{x \in X \mid \chi(x) = 1\}$$

とおいて X の部分集合 A_χ が定められる. A_χ を関数 χ の台(support) という。

Theorem 双対性

$$A_{(\chi_A)} = A$$

$$\chi_{(A_\chi)} = \chi$$

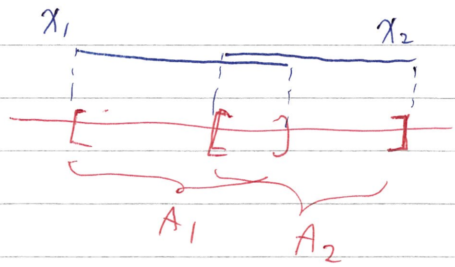
Def

$$(\chi_1 \wedge \chi_2)(x) := \chi_1(x) \cdot \chi_2(x) \qquad 0, 1 \text{ のかけ算}$$

$$(\chi_1 \vee \chi_2)(x) := \chi_1(x) + \chi_2(x) \qquad 0, 1 \text{ の足し算}$$

ただし $1 + 1 = 1$ とする.

Theorem



$$A_{(\chi_1 \wedge \chi_2)} = A_{\chi_1} \cap A_{\chi_2}$$

$$A_{(\chi_1 \vee \chi_2)} = A_{\chi_1} \cup A_{\chi_2}$$

$$\chi_{(A_1 \cap A_2)} = \chi_{A_1} \wedge \chi_{A_2}$$

$$\chi_{(A_2 \cup A_2)} = \chi_{A_1} \vee \chi_{A_2}$$

$A \subseteq X$ に対して

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "t", "\text{定値写像}"'] \arrow[d, hook, "\text{包含写像 } i_A"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & 1 \arrow[d, hook, "\text{包含写像 } i"] \\
X \arrow[r, "\chi_A"', "\text{特性関数}"] & \Omega = \{0,1\}
\end{tikzcd}$$

Ω を多値化してやる.
部分集合 A の概念がぼやける.
これを「ぼやけた命題 A」と考える.
「A かつ B」 「$A \times B$」を言えるようにする
「A ならば B」 「$A \Rightarrow B$」を言えるようにする.
とくに $A \times B \to C$ と
$A \to (B \Rightarrow C)$ が同等であるように定める.

「xが3で割り切れる かつ xが7で割り切れる」ならば 「xは21で割り切れる」

<u>Def</u> subobject classifier
圏 $\mathcal{C}$ は terminal object 1 を持つとする.
$\mathcal{C}$ の object Ω と, monic $\top : 1 \to \Omega$ (truth arrow) があって,
i) 任意の monic $m : A \rightarrowtail X$ に対して
arrow $\chi_m : X \to \Omega$ (charcteristic arrow) が一意的に存在して

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "!"] \arrow[d, tail, "m"'] & 1 \arrow[d, tail, "\top"] \\
X \arrow[r, "\chi_m"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

が pullback になる.

ii) 任意の diagram

$$\begin{tikzcd}
 & 1 \arrow[d, "\top"] \\
X \arrow[r, "u"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

が pullback を持つ (結果的に m は monic になる)

<u>Def</u> topos

topos とは $\boxed{\text{圏}}$ であり
有限積 (finite product) を持ち、
terminal obj を持ち、
sub object classifier を持ち、
任意の power object を持つ。

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[d, dashed, "1_A \times \hat{f}"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A \times C^{\cancel{B}A} \arrow[r, "ev_A"'] & C
\end{tikzcd}$$

$$f(a, b) = \hat{f}_b(a)$$

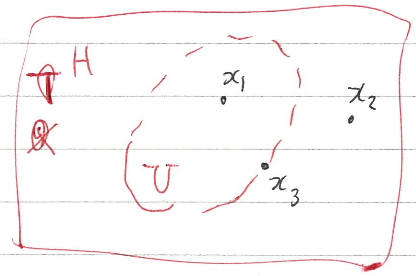
$$\left(\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[d, "\hat{f} \times 1_B"'] \arrow[dr, "f"] & \\
C^B \times \cancel{A}B \arrow[r, "ev_B"'] & C
\end{tikzcd} \qquad f(a, b) = \hat{f}_a(b) \right)$$

例. 空間性トポス

~~X~~ H: 位相空間 Hausdorff とする

$O(\cancel{X})$: ~~X~~ H の開集合全体

$U \subset O(\cancel{X})$ H 開集合



この部分は明るい

$x_1 \in U$	Yes
$x_2 \in U$	No
$x_3 \in U$	グレーゾーン

例. 「今日は寒い」の真理値 → $x_1 \in U$ どんぴしゃ寒い 明るい

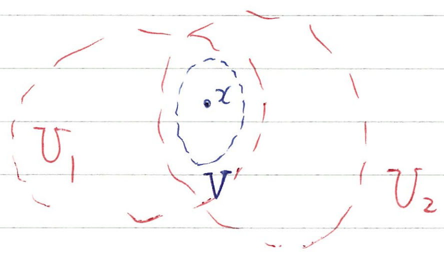
→ $x_2 \in U$ 全然寒くない. 暗い

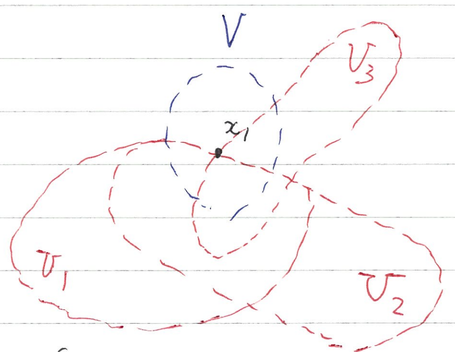
→ $x_3 \in U$ とんとん…. とんとん

$$\tilde{\Omega} := \{ (x, U) \mid x \in \cancel{X} H,\ U \in O(X) \}$$

~~$\tilde{\Omega}$の元~~ $(x_1, U_1) \equiv (x_2, U_2) :\Longleftrightarrow x_1 = x_2$

かつ $\exists V \in O(\cancel{X} H) \ (x \in V$ かつ $U_1 \cap V = U_2 \cap V)$





この関係 $\equiv$ は同値関係になる.

$$\Omega := \tilde{\Omega} / \equiv$$

$x \in U \Longleftrightarrow (x, U) \equiv (x, \cancel{X} H)$

$x \notin \bar{U}$ (Uの閉包) $\Longleftrightarrow (x, U) \equiv (x, \emptyset)$

$(x_1, U_1) \equiv (x_1, U_2)$
$\not\equiv (x_1, U_3)$

$p : \Omega \longrightarrow H$
$(x, U) \longmapsto x$ と定めて Ω は H上の層 sheaf になる.

$\mathrm{Top}(H) :=$ H上の層全体 (反変関手 $O(\cancel{X} H) \rightsquigarrow \mathrm{Set}$ の全体) 層を object 層射を arrow

~~圏 $\mathcal{C}$ ($\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$) における subobject classifier Ω の作り方.~~

圏 $\mathcal{C}$ の monic $B \xrightarrow{m} A$ があれば B は A の subobject だと言いたい.
monic $C \xrightarrow{n} A$ もあって

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dr, tail, "n"] & \\ B \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, tail, "m"'] & & A \end{tikzcd}$$

なる f (arrow) があれば $\boxed{m \le n}$ と定める.

とくに f が同型射であれば $\boxed{m \sim n}$ と定める
equivalent
同値類を $[m]$ と書く

定理 $m \le n$ かつ $n \le m$ ~~ならば~~ $\Longleftrightarrow$ $m \sim n$

A をcodomainとする monic

$\mathrm{Sub}(A) :=$ 同値類 $[m] : B \xrightarrow{m} A$ の全体

~~関手の圏 $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$ を考える.~~

とくに $\mathcal{C} = \mathbf{Set}$ の場合,

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "!"] \arrow[d, tail, "m"'] & 1 \arrow[d, "\top"] \\ A \arrow[r, "\chi_m"'] & \Omega = \{0,1\} \end{tikzcd}$$

定理
$m \sim n \Longleftrightarrow \chi_m = \chi_n$

$\mathrm{Sub}(A)$ と characteristic function は一対一対応する.

関手の圏 $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$ に対しては subobject classifier の構成法がある：

$$H_A = \mathcal{C}(A,-) : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Set}$$

共変関手　$B \longmapsto H_A(B) := \mathcal{C}(A,B) = \{A \underset{\text{arrow}}{\rightrightarrows} B\}$

$\boxed{\text{米田の補題}}$

任意の共変関手 $F : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Set}$、任意の対象 $A \in Ob(\mathcal{C})$ に対して、

$$\theta : Nat(H_A, F) \longrightarrow F(A) \quad \text{は}\ \overset{\mathbf{Set}}{\text{全単射}}\ \text{である。}$$

$$\eta \longmapsto \theta(\eta) := \eta_A(1_A)$$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C} \ni (A \xrightarrow{f} B) \arrow[dl, squiggly, "H_A = \mathcal{C}(A,-)"'] \arrow[dr, squiggly, "F"] & \\ \cdot \arrow[rr, phantom, "\overset{\bullet}{\to}\ \eta"] & & \cdot \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(A,A) = H_A(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "H_A(f)"'] & F(A) \ni a \arrow[d, "F(f)"] \\ \mathcal{C}(A,B) = H_A(B) \arrow[r, "\eta_B"] & F(B) \end{tikzcd}$$

$f = H_A(f)\, 1_A$

$$\eta_B(f) = \eta_B \circ H_A(f)\ 1_A$$
$$= F(f) \circ \eta_A\ 1_A$$
$$\cancel{= F(f)}$$

なので η は ~~F だけで決まる~~ $\eta_A(1_A)$ だけで決まる。
ゆえに θ は単射である。

θ が全射であることを示すために
任意の $a \in F(A)$, $B \in Ob(\mathcal{C})$ に対し、写像 $a^*_B : H_A(B) = \mathcal{C}(A,B) \longrightarrow F(B)$, $f \longmapsto F(f)(a)$ と定める。
$a^* : H_A \overset{\bullet}{\longrightarrow} F$ は nat tranf になっていることがたしかめられる。

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{C} \ni (B \xrightarrow{g} C) \arrow[dl, squiggly, "H_A"'] \arrow[dr, squiggly, "F"] & \\ \cdot & & \cdot \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} f \in H_A(B) \arrow[r, "a^*_B"] \arrow[d, "H_A(g)"'] & F(B) \arrow[d, "F(g)"] \\ H_A(C) \arrow[r, "a^*_C"] & F(C) \end{tikzcd}$$

$$F(g) \circ a^*_B(f) = F(g)F(f)\, a$$
$$= F(g \circ f)\, a$$
$$a^*_C \circ H_A(g)(f) = a^*_C(g \circ f)$$
$$= F(g \circ f)(a)$$

一致。

$$\theta(a^*) = a^*_A(1_A) = F(1_A)\, a = 1_{FA}\, a = a$$

で θ は全射

関手の圏 $\mathbf{Set}^{\mathcal{C}}$ の sub object classifier があたえい

$H_A = \mathcal{C}(A, -) : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Set}$ に対して

characteristic arrow と subobject とを同一視すると、

$$\mathrm{Nat}(H_A, \Omega) =: \mathrm{Sub}(H_A)$$ が成り立つべきである。

$$= \Omega(A)$$

Ω も $\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathrm{Set}$ という関手であり、米田の補題より。

これを $\Omega(A)$ の定義式とみなす。

$\mathcal{C}$ の arrow

$A \xrightarrow{f} B$ に対して $\Omega(A) \xrightarrow{\Omega(f)} \Omega(B)$ をどう定めるか？

~~$\mathcal{C}(-, B) \xrightarrow{f^*}$~~

$\mathcal{C}(B, -) \xrightarrow{f^*} \mathcal{C}(A, -)$ は nat. tranf.

$\mathcal{C}(B,-) = H_B$, $\mathcal{C}(A,-) = H_A$

もう少し具体的には、$\Omega(A) = \mathrm{sub}(H_A) = \mathrm{sub}(\mathcal{C}(A, -)) = \mathrm{sub}(\{A \rightrightarrows\})$

だから

$\Omega(A)$ は、$\{\underbrace{A \text{ を domain とする arrow の集合}}_{\parallel}\}$ の全体

で ~~関手 $\mathcal{C}$~~

S : sieve on A という。

つまり S は arrow の集合 $\{f : A \rightrightarrows\}$ であり、

$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[r, "g"] & \bullet \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

$f \in S$ ~~から~~ ならば 任意の $\mathcal{C}$-arrow g に対して

$$\mathrm{dom}(g) = \mathrm{cod}(f) \Longrightarrow g \circ f \in S$$

が成り立つもの。

このうしておくと、$S : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathbf{Set}$ は共変関手になる。

H_A の sub functor. $\quad B \rightsquigarrow \{A \xrightarrow{f} B \mid f \in S\}$

$\mathcal{C}$-arrow

$A \xrightarrow{f} B$ に対しては、$S \in \Omega(A)$ に対して

$$\Omega(f) S = \{ g \in \mathrm{Arr}(\mathcal{C}) \mid \mathrm{dom}\, g = B \text{ かつ } g \circ f \in S \}$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, "g"] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & {} \end{tikzcd}$$

で $\Omega(f) : \Omega(A) \to \Omega(B)$ を定める。

量子系のトポス

$\mathcal{H}$: Hilbert sp

$\mathcal{O}$: $\mathcal{H}$ 上のself-adjoint operator全体

$\mathcal{O}$ を圏とみなす。　$A \xrightarrow{f} B$　operator A から B への関数 $B = f(A)$

~~共変関手 G : $\mathcal{O}$~~

W_A := A の スペクトル分解作用素の代数（可換な v.N.alg）をふくむ 集合

関手 $G : \mathcal{O} \rightsquigarrow Set$

$A \rightsquigarrow G(A) := W_A$

$(A \xrightarrow{f} B) \rightsquigarrow G(f)$

$W_A \longrightarrow W_B$

$\cup$

$E[A \in \Delta] \longmapsto E[f(A) \in f(\Delta)]$

これは $Set^{\mathcal{O}}$ の一の元であって、他の元としてどんなものを考えるのか？

subobject classifier はどうなるのか？