光子の波動関数は存在しないのか
— 実験的立場から

北野 正雄

京都大学工学研究科

2017 年 1 月 8–9 日

第 6 回 QUATUO 研究会@高知工科大学

光子の波動関数

- 光子の波動関数（ 空間表示の確率振幅 $\psi(\boldsymbol{r})$ ）は存在しないといわれている.
- しかし、光子を用いた量子現象の研究において、光子の波動関数（ 空間的な確率）は無造作, 無批判, 無意識に利用されている。
- 2 つの極論
  - 原理派「 光子の波動関数は存在しない。場の理論を使うべし。」
  - 現実派「 古典的電場に相当するものを波動関数と見なせばよい。」

光子の位置問題

- 光子については, 位置の演算子が定義できない — 初等量子論が展開できない.
- うまく行かない原因
  - 質量がゼロ
  - スピンの存在

谷村: “光子の局在化問題”, 第 2 回 QUATUO 研究会 (2013)

Riemann-Silberstein ベクトル

- Maxwell 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = 0, \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

- 複素ベクトル場 $\boldsymbol{F}$

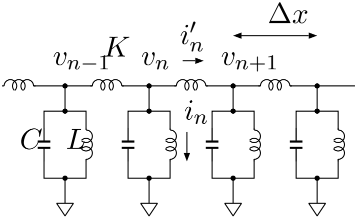
$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &:= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{\varepsilon_0}\boldsymbol{E} + \mathrm{i}\sqrt{\mu_0}\boldsymbol{H}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\boldsymbol{D}}{\sqrt{\varepsilon_0}} + \mathrm{i}\frac{\boldsymbol{B}}{\sqrt{\mu_0}}\right) \quad \overset{\text{SI}}{\sim} \sqrt{\mathrm{J}/\mathrm{m}^3} \end{aligned}$$

- 簡単化;

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, t) = c_0 \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, t), \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} = 0$$

I. Bialynicki-Birula: Progress in Optics XXXVI, p. 245 (1996)

(参考) シュレディンガー回路



- 複素変数

$$u_n = \sqrt{\frac{C}{2U}}v_n + \mathrm{i}\sqrt{\frac{L}{2U}}i_n = \sqrt{\frac{1}{2CU}}q_n + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2LU}}\phi_n$$

全エネルギー: $U := (1/2)\sum_n (Cv_n^2 + Li_n^2)$

- 離散 Schrödinger 方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_n = -\mathrm{i}\omega u_n + \frac{\mathrm{i}\omega}{2}\frac{L}{K}(u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1})$$

Schrödinger-like 方程式

- $\mathrm{i}\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t) = c_0 \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)$ を成分で書くと,

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}F_k = c_0\epsilon_{ijk}\partial_i F_j = \mathrm{i}c_0(s_i)_{jk}\partial_i F_j = -\mathrm{i}c_0(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{\nabla})_{kj}F_j$$

- 3 つの 3×3 行列 $(s_i)_{jk} := -\mathrm{i}\epsilon_{ijk}$

$$[s_i, s_j] = \mathrm{i}\epsilon_{ijk}s_k$$

- 両辺に $\hbar$ をかけて

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t) = c_0\left[\boldsymbol{s}\cdot\left(\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\boldsymbol{\nabla}\right)\right]\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)$$

(cf) Wyle equation for neutrinos: $\mathrm{i}\hbar\dfrac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{r},t) = c_0\left[\boldsymbol{\sigma}\cdot\left(\dfrac{\hbar}{\mathrm{i}}\boldsymbol{\nabla}\right)\right]\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{r},t)$

電磁場のエネルギー, 運動量

- エネルギー

$$E = \int \mathrm{d}r^3 \, \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}) = \int \mathrm{d}r^3 \, \boldsymbol{F}^* \cdot \boldsymbol{F}$$

- 運動量

$$\boldsymbol{P} = \int \mathrm{d}r^3 \, (\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}) = \frac{1}{2\mathrm{i}c_0}\int \mathrm{d}r^3 \, \boldsymbol{F}^* \times \boldsymbol{F}$$

空間的モード展開

- 波数 $\boldsymbol{k}$ のモード振幅　$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}(t) \overset{\mathrm{SI}}{\sim} \sqrt{\mathrm{J\,m^3}}$.

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t) = \int \frac{\mathrm{d}k^3}{(2\pi)^3} \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

- 波数空間での Schrödinger-like 方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}(t) = c_0 \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}(t), \quad \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}(t) = 0$$

- $\boldsymbol{k}$ 毎の正規直交基底: $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}3} := \boldsymbol{k}/|\boldsymbol{k}|$ (縦), $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}1}$, $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}2}$ (横).

$$\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\pm} := (\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}1} \pm \mathrm{i}\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}2})/\sqrt{2}$$

- 横波条件から

$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{k}}(t) = F_{\boldsymbol{k}+}(t)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}+} + F_{\boldsymbol{k}-}(t)\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}-}$$

- 方程式に代入

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\boldsymbol{k}\pm}(t) = \pm c_0 |\boldsymbol{k}| F_{\boldsymbol{k}\pm}(t)$$ 時間的単振動

空間的モード展開 (2)

- 単振動解 $F_{\boldsymbol{k}\pm}(t) = f_\pm(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}\omega_{\boldsymbol{k}}t}, \quad \omega_{\boldsymbol{k}} := c_0|\boldsymbol{k}|$ より

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t) &= \int \frac{\mathrm{d}k^3}{(2\pi)^3} \left(f_+(\boldsymbol{k})\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}+}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\boldsymbol{k}}t} + f_-(\boldsymbol{k})\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}-}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\boldsymbol{k}}t} \right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}k^3}{(2\pi)^3} \left(f_+(\boldsymbol{k})\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}+}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\boldsymbol{k}}t+\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + f_-(-\boldsymbol{k})\boldsymbol{e}_{(-\boldsymbol{k})-}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\boldsymbol{k}}t+\mathrm{i}(-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{r}} \right) \\
&= \int \frac{\mathrm{d}k^3}{(2\pi)^3} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}+} \left(f_+(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\boldsymbol{k}}t+\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + f_-^*(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\boldsymbol{k}}t-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \right) \\
&=: \boldsymbol{F}^{(+)}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{F}^{(-)}(\boldsymbol{r},t)
\end{aligned}
$$

- 複素共役

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}^*(\boldsymbol{r},t) &= \int \frac{\mathrm{d}k^3}{(2\pi)^3} \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}-} \left(f_-(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_{\boldsymbol{k}}t+\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} + f_+^*(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_{\boldsymbol{k}}t-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \right) \\
&= \boldsymbol{F}^{(-)*}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{F}^{(+)*}(\boldsymbol{r},t)
\end{aligned}
$$

エネルギー

- エネルギーの波数表現

$$E = \int \mathrm{d}r^3 \boldsymbol{F}^* \cdot \boldsymbol{F} = \int \frac{\mathrm{d}k^3}{(2\pi)^3} \sum_\lambda f_\lambda^*(\boldsymbol{k}) f_\lambda(\boldsymbol{k})$$

- エネルギーを「 波数空間における確率振幅」$\phi_\lambda(\boldsymbol{k})$ を用いて

$$E = \langle \phi | \hbar\omega | \phi \rangle = \int \frac{\mathrm{d}k^3}{(2\pi)^3} \sum_\lambda \hbar\omega_{\boldsymbol{k}} \phi_\lambda^*(\boldsymbol{k}) \phi_\lambda(\boldsymbol{k})$$

- 両式を比較

$$\phi_\lambda(\boldsymbol{k}) := \frac{1}{\sqrt{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}}} f_\lambda(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{\hbar c_0}} |\boldsymbol{k}|^{-1/2} f_\lambda(\boldsymbol{k}) \quad \overset{\mathrm{SI}}{\sim} \mathrm{m}^{3/2}$$

- 規格化条件

$$\int \frac{\mathrm{d}k^3}{(2\pi)^3} \sum_\lambda \phi_\lambda^*(\boldsymbol{k}) \phi_\lambda(\boldsymbol{k}) = 1$$

$|\boldsymbol{k}|$ 依存性

- 「 確率振幅」$\phi_\lambda(\boldsymbol{k})$ は電磁場の振幅 $f_\lambda(\boldsymbol{k})$ とは異なることに注意する;

$$\phi_\lambda(\boldsymbol{k}) := \frac{1}{\sqrt{\hbar c_0}} |\boldsymbol{k}|^{-1/2} f_\lambda(\boldsymbol{k})$$

- もし質量があれば,

$$|\boldsymbol{k}| \to \sqrt{|\boldsymbol{k}|^2 + \left(\frac{mc_0}{\hbar}\right)^2} \sim \frac{mc_0}{\hbar} \quad \text{低エネルギーでは一定}$$

$\boldsymbol{k}$ 表示の波動関数

- 光子の状態を表すケット $|\phi\rangle$ は, $\boldsymbol{k}$ 空間の波動関数を用いて

$$|\phi\rangle = \int \mathrm{d}k^3 \left[\phi_+(\boldsymbol{k})|\boldsymbol{k},+\rangle + \phi_-(\boldsymbol{k})|\boldsymbol{k},-\rangle\right]$$

ただし, $|\boldsymbol{k},\lambda\rangle$ $(\lambda = +,-)$ は基底ケット.

運動量

- 運動量

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= \langle \phi | \hbar \boldsymbol{k} | \phi \rangle \\
&= \int \frac{\mathrm{d}k^3}{(2\pi)^3} \hbar \boldsymbol{k} \sum_{\lambda} \phi_{\lambda}^{*}(\boldsymbol{k}) \phi_{\lambda}(\boldsymbol{k})
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{r}$ 表示が可能な場合

波数 $\boldsymbol{k}$ の方向がほぼ揃っている場合

- $\phi_\lambda(\boldsymbol{k})$ が特定の波数 ($\boldsymbol{k}_0$ とおく) の方向に対してのみゼロでない値を持つ:

$$|\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}3} - \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_0 3}| \ll 1$$

- 近似的に共通の偏光基底を用いることができる.

$$|\boldsymbol{k}, \lambda\rangle = |\boldsymbol{k}\rangle|\lambda\rangle$$

- 状態が偏光と空間部分に分離

$$|\phi\rangle = \sum_\lambda |\lambda\rangle \int \mathrm{d}k^3 \phi_\lambda(\boldsymbol{k})|\boldsymbol{k}\rangle$$

- 位置表示が可能となる — 空間的波動関数

$$\begin{aligned}\Phi_\lambda(\boldsymbol{r}) := \langle\boldsymbol{r}|\langle\lambda|\phi\rangle &= \int \mathrm{d}k^3 \phi_\lambda(\boldsymbol{k})\langle\boldsymbol{r}|\boldsymbol{k}\rangle \\ &= \int \mathrm{d}k^3 \phi_\lambda(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = (\mathcal{F}\phi_\lambda)(\boldsymbol{r}) \quad \text{Fourier 変換}\end{aligned}$$

波動関数 $\varPhi_\lambda(\boldsymbol{r})$ と 場の振幅 $F_\lambda(\boldsymbol{r})$ の関係

- $\phi_\lambda(\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{\hbar c_0}}|\boldsymbol{k}|^{-1/2} f_\lambda(\boldsymbol{k})$ を逆 Fourier 変換すると,

$$\begin{aligned}
\varPhi_\lambda(\boldsymbol{r}) &= (\mathcal{F}^{-1}\phi_\lambda)(\boldsymbol{r}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\hbar c_0}}|\boldsymbol{r}|^{-5/2} * F_\lambda(\boldsymbol{r}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\hbar c_0}} \int \mathrm{d}r'^3 \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{5/2}} F_\lambda(\boldsymbol{r}') \quad \text{Landau-Pierls 波動関数}
\end{aligned}$$

- 逆の関係 $f_\lambda(\boldsymbol{k}) = \sqrt{\hbar c_0}|\boldsymbol{k}|^{1/2}\phi_\lambda(\boldsymbol{k})$ を逆 Fourier 変換

$$\begin{aligned}
F_\lambda(\boldsymbol{r}) &= \sqrt{\hbar c_0}|\boldsymbol{r}|^{-7/2} * \varPhi(\boldsymbol{r}) \\
&= \sqrt{\hbar c_0} \int \mathrm{d}r'^3 \frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{7/2}} \varPhi_\lambda(\boldsymbol{r}')
\end{aligned}$$

公式

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}^{-1}(|\boldsymbol{k}|^{\alpha})(\boldsymbol{r}) &= \int dk^3 |\boldsymbol{k}|^{\alpha} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \\
&= 2\pi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\infty} \mathrm{d}k\, k^{2+\alpha} \sin\theta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kr\cos\theta} \\
&= 2\pi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}t \int_0^{\infty} \mathrm{d}k\, k^{2+\alpha} \mathrm{e}^{\mathrm{i}krt} \quad (t := \cos\theta) \\
&= 2\pi \int_0^{\infty} \mathrm{d}k\, k^{2+\alpha} \left. \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}krt}}{\mathrm{i}kr} \right|_{t=-1}^{1} \\
&= 4\pi \int_0^{\infty} \mathrm{d}k\, k^{2+\alpha} \frac{\sin kr}{kr} \\
&= 4\pi r^{-3-\alpha} \int_0^{\infty} \mathrm{d}\kappa\, \kappa^{1+\alpha} \sin\kappa \quad (\kappa := kr) \\
&= 4\pi \Gamma(2+\alpha) \sin\frac{\alpha}{2}\pi |\boldsymbol{r}|^{-3-\alpha}
\end{aligned}
$$

さらにスペクトルが狭い場合

準単色の場合

- 周波数スペクトルが $\omega_0 = c_0 k_0$ 付近に集中; $|\boldsymbol{k}| \sim k_0$.

$$\Phi_\lambda(\boldsymbol{r}) \sim \frac{1}{\sqrt{\hbar c_0 k_0}} F_\lambda(\boldsymbol{r})$$

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{\hbar c_0 k_0}} \int \mathrm{d}r^3 \left[F_+(\boldsymbol{r}) |+\rangle + F_-(\boldsymbol{r}) |-\rangle \right] |\boldsymbol{r}\rangle$$

問題

光検出器で測っているのは，波動関数 $\Phi_\lambda(\boldsymbol{r})$ の 2 乗か，場の振幅 $F_\lambda(\boldsymbol{r})$ の 2 乗か？

1. 波動関数の 2 乗
2. 場の振幅の 2 乗
3. 場合による
4. どちらでもない

光センサー

入射パワー P

- 量子型 (Si フォトダイオードなど)

$$I = \frac{e}{\hbar\omega} P \quad \text{波長依存}$$

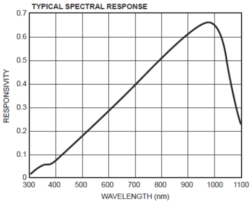
感度が周波数に逆比例　($\omega > E_{\mathrm{gap}}/\hbar$ の範囲で)

- 熱型 (サーモパイルセンサーなど)

$$V \propto \Delta T \propto P$$

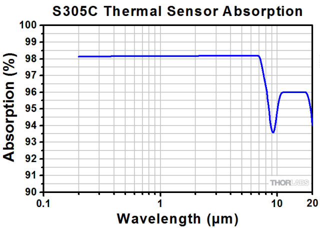
感度は周波数に無関係

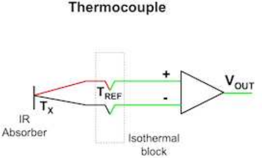
Photo Diodes



ODD-12E, www.optdiode.com

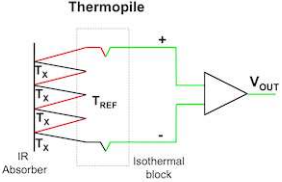
サーマルセンサー





$V_{OUT} = S \cdot (T_X - T_{REF})$

S: Seebeck coefficient



$V_{OUT} = N \cdot S \cdot (T_X - T_{REF})$

S: Seebeck coefficient
N: Number of thermocouples

www.thorlabs.co.jp

www.sensorsmag.com

何か面白い実験はできないでしょうか?