共変解析力学のDirac場と結合した重力場への適用

中嶋 慧

筑波大 数理物質 都倉研D2

arXiv:1510.09048

筑波大学 University of Tsukuba

(1)背景

解析力学・量子論・相対論

解析力学

ラグランジュ形式

$$L = L(q, \dot{q})$$

ハミルトン形式

$$H = p\dot{q} - L = H(q,p) \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}$$

量子力学

量子化 $\{q,p\} = 1 \rightarrow [q,p] = i\hbar$

量子力学はハミルトン形式と相性が良い

場の解析力学

$$\boxed{\mathcal{L} = \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu\psi) \quad \partial_\mu\psi = (\partial_0\psi, \nabla\psi)}$$

ラグランジュ形式

ハミルトン形式

相対論はラグランジュ形式と相性が良い

$$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 \psi}$$

相対論

$$\mathcal{H} = \pi\partial_0\psi - \mathcal{L} = \mathcal{H}(\psi, \nabla\psi, \pi)$$

[問題1]時間を特別扱いし、相対論的共変性が自明でない

ゲージ固定

電磁場のラグランジアン密度

$$c, \mu_0, \varepsilon_0 = 1$$

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + A_\mu J^\mu \qquad A_\mu = (-\phi, \boldsymbol{A}),\ J^\mu = (\rho, \boldsymbol{i})$$

電磁場 $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$

スカラーポテンシャルの正準共役運動量: $\pi^\phi = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_0 A_0} = 0$

[問題2]正準運動量は独立ではない

⟶ ゲージ固定　ゲージ変換 $A_\mu \rightarrow A_\mu - \partial_\mu \Lambda$ のもとで、$F_{\mu\nu}$ は不変

⟶ ポアソン括弧の代わりにDirac括弧

これらの問題は、重力の量子化の際に特に問題となる。

(2)共変解析力学

De Donder-Weyl theory [1]

De Donder (1930), H.Weyl (1934)[1]

問題1は解決　一般に独立でない

$$\pi^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \psi_{\mu_1\cdots\mu_p}} \qquad \mathcal{L} = \sqrt{-g}\mathcal{L}(\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}, \partial_\mu\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}),\ g = \det g_{\mu\nu}$$

$$\mathcal{H}_{\mathrm{DW}}(\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}, \pi^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}) \overset{\text{def}}{=} \pi^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}\partial_\mu\psi_{\mu_1\cdots\mu_p} - \mathcal{L}$$

De Donder-Weyl方程式

$$\boxed{\partial_\mu\psi_{\mu_1\cdots\mu_p} = \frac{\partial \mathcal{H}_{\mathrm{DW}}}{\partial \pi^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p}},\ \partial_\mu \pi^{\mu,\mu_1\cdots\mu_p} = -\frac{\partial \mathcal{H}_{\mathrm{DW}}}{\partial \psi_{\mu_1\cdots\mu_p}}}$$

一般に成立しない(スカラー場でだけ成立)。

共変解析力学

$$L = L(\psi, d\psi) = \mathcal{L}\sqrt{-g}dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{D-1} \qquad dx^\mu \wedge dx^\nu = -dx^\nu \wedge dx^\mu$$

微分形式が基本変数

$$\psi = \underbrace{\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}}_{\text{完全反対称}} dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} \quad d\psi = \underbrace{\partial_{[\mu}\psi_{\mu_1\cdots\mu_p]}}_{\text{完全反対称}} dx^\mu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\mu_p} \quad p = 0,1,\cdots,D-1$$

定義

$$\delta L = \delta\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial \psi} + \delta d\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\psi}$$

$$= \delta\psi \wedge \left(\frac{\partial L}{\partial \psi} - (-1)^p d\frac{\partial L}{\partial d\psi}\right) + d\left(\delta\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\psi}\right) \longrightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial \psi} - (-1)^p d\frac{\partial L}{\partial d\psi} = 0}$$

オイラー・ラグランジュ方程式

共役運動量 $\boxed{\pi \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\partial L}{\partial d\psi}}$　$D-p-1 \equiv q$-form

Hamilton D-form (not (D-1)-form)

$$H(\psi, \pi) \overset{\text{def}}{=} d\psi \wedge \pi - L$$

$$\delta H = d\delta\psi \wedge \pi + d\psi \wedge \delta\pi - \delta L$$

$$= \cancel{\delta d\psi \wedge \pi} + (-1)^{(p+1)q}\delta\pi \wedge d\psi - \delta\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial \psi} - \cancel{\delta d\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial d\psi}}$$

$$= (-1)^{(p+1)q}\delta\pi \wedge d\psi - \delta\psi \wedge \frac{\partial L}{\partial \psi}$$

正準方程式[2,3,4]

$$\frac{\partial H}{\partial \psi} = -\frac{\partial L}{\partial \psi}, \quad \frac{\partial H}{\partial \pi} = (-1)^{(p+1)q} d\psi. \longrightarrow \boxed{d\psi = (-1)^{(p+1)q}\frac{\partial H}{\partial \pi}, \quad d\pi = -(-1)^p \frac{\partial H}{\partial \psi}.}$$

ポアソン括弧[7]　場より質点の解析力学に近い

$$\{A, B\} \overset{\text{def}}{=} (-1)^{(p+1)q}\frac{\partial A}{\partial \psi} \wedge \frac{\partial B}{\partial \pi} - (-1)^p \frac{\partial A}{\partial \pi} \wedge \frac{\partial B}{\partial \psi}.$$

$$\boxed{d\psi = \{\psi, H\},\ d\pi = \{\pi, H\}.}$$

$$\{\psi, \pi\} = (-1)^{(p+1)q},\ \{\pi, \psi\} = -(-1)^p.$$

2つの理論の関係

[5]で初めてDe Donder-Weyl theoryのポアソン括弧が導出された。これは共変解析力学のものと近いが異なる。後者のDirac括弧への拡張は見つかっていないが、前者の拡張は知られている[6]。

ポアソン括弧の量子化への応用可能性は不明である。

しかし、I. V. Kanatchikovは、Dirac括弧に基づいたPrecanonical quantization を提案している[6]。

(3)基本的な場の理論への応用

電磁場[2,3,4]

$$L(A, dA) = -\frac{1}{2}F \wedge *F + J \wedge A \qquad A = A_\mu dx^\mu,\ F = dA = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu,\ J = *(J_\mu dx^\mu)$$

$$*\psi = \frac{1}{r!}E_{\nu_1\cdots\nu_r}{}^{\mu_1\cdots\mu_p}\psi_{\mu_1\cdots\mu_p}dx^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\nu_r}$$

D-p=r-form

$$\frac{\partial L}{\partial A} = -J,\ \frac{\partial L}{\partial dA} = -*F$$

オイラー・ラグランジュ方程式 $\dfrac{\partial L}{\partial A} + d\dfrac{\partial L}{\partial dA} = 0$ はMaxwell方程式 $d*F = -J$ を与える。

$$\pi \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial L}{\partial dA} = -*F \qquad H(A, \pi) = \frac{1}{2}\pi \wedge *\pi - J \wedge A$$

独立！

$$dA = *\pi \qquad \frac{\partial H}{\partial \pi} = *\pi,\ \frac{\partial H}{\partial A} = J$$

正準方程式 $dA = \dfrac{\partial H}{\partial \pi},\ d\pi = \dfrac{\partial H}{\partial A}$ は $\boxed{dA = *\pi,\ d\pi = J.}$

全て微分形式で書かれており、座標系に依らない。**問題2も解決。正準方程式はゲージ共変。**

Dirac場[7,8]

3-formを作るのに1-form θ^a(四脚場)が必要

$$\Omega = \sqrt{-g}dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^{D-1} = *1$$

$$L_{\mathrm{D}}^\beta = -\frac{1+\beta}{2}\bar{\psi}\gamma_c e^c \wedge \left(d\psi + \frac{1}{4}\gamma_{ab}\omega^{ab}\psi\right) + \frac{1-\beta}{2}e^c \wedge \left(d\bar{\psi} - \frac{1}{4}\bar{\psi}\gamma_{ab}\omega^{ab}\right)\gamma_c\psi - m\bar{\psi}\psi\Omega - \frac{\beta}{2}C_a\bar{\psi}\gamma^a\psi\Omega$$

$$= L_{\mathrm{D}}^0 + \frac{\beta}{2}d(e_a\bar{\psi}\gamma^a\psi) \qquad \bar{\psi} = i\psi^\dagger\gamma^0 \quad \{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\eta^{ab} \quad \eta_{ab} = \mathrm{diag}(-,+,+,+) \quad \gamma_{ab} = \gamma_{[a}\gamma_{b]}$$

$$e^a = *\theta^a,\ \theta^a = \theta^a{}_\mu dx^\mu \quad g_{\mu\nu} = \eta_{ab}\theta^a{}_\mu\theta^b{}_\nu,\ \eta_{ab} = g^{\mu\nu}\theta_{a\mu}\theta_{b\nu} \quad \omega^{ab} = \omega^{ab}{}_\mu dx^\mu = -\omega^{ba}$$

四脚場(vielbein)　ゲージ場(局所ローレンツ変換の)

$$\mathcal{L}_{\mathrm{D}}^\beta = -\frac{1+\beta}{2}\bar{\psi}\gamma_c\theta^{c\mu}\left(\partial_\mu\psi + \frac{1}{4}\gamma_{ab}\omega^{ab}{}_\mu\psi\right) + \frac{1-\beta}{2}\theta^{c\mu}\left(\partial_\mu\bar{\psi} - \frac{1}{4}\bar{\psi}\gamma_{ab}\omega^{ab}{}_\mu\right)\gamma_c\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{\beta}{2}C_a\bar{\psi}\gamma^a\psi$$

torsion(捩率) $\Theta^a = d\theta^a + \omega^a{}_b \wedge \theta^b = \frac{1}{2}C^a{}_{bc}\theta^b \wedge \theta^c,\ C_a = C^b{}_{ab}$

共役運動量 $\Pi^\beta = \dfrac{\partial L_{\mathrm{D}}^\beta}{\partial d\psi} = \dfrac{1+\beta}{2}\bar{\psi}\gamma_c e^c,\ \bar{\Pi}^\beta = \dfrac{\partial L_{\mathrm{D}}^\beta}{\partial d\bar{\psi}} = -\dfrac{1-\beta}{2}e^c\gamma_c\psi$

重力場[7]

従来の解析力学では、時空を(3+1)分解し、計量を位置変数と考える。
この結果、第1種拘束系となり、ゲージ固定(座標系の制限)が必要となる。

⟶ 共変解析力学では(3+1)分解は不要。非拘束系となり、ゲージ固定も不要。

$$L(\theta, d\theta) = L_{\mathrm{G}}(\theta, d\theta) + L_{\mathrm{mat}}(\theta, \omega(\theta, d\theta)),\ L_{\mathrm{G}}(\theta, d\theta) = \frac{1}{2\kappa}N',\ N' \overset{\text{def}}{=} *R - d(e_{ab} \wedge \omega^{ab}).$$

$$\Omega^a{}_b = d\omega^a{}_b + \omega^a{}_c \wedge \omega^c{}_b = \frac{1}{2}R^a{}_{bcd}\theta^c \wedge \theta^d \quad R_{ab} = R^c{}_{acb},\ R = R^a{}_a.$$

この項を引かないと扱えない。
高次曲率項は扱えない。

$$\delta L(\theta, d\theta) = -\delta\theta^c \wedge \left(\frac{1}{2\kappa}[e_{abc} \wedge \Omega^{ab} + d(e_{abc} \wedge \omega^{ab})] + *T_c\right) + \delta d\theta^c \wedge \frac{1}{2\kappa}e_{abc} \wedge \omega^{ab}$$

$$e^{ab} = *(\theta^a \wedge \theta^b),\ e^{abc} = *(\theta^a \wedge \theta^b \wedge \theta^c)$$

$$+\delta\omega^{ab}(\theta, d\theta) \wedge \underbrace{\left(\frac{1}{2\kappa}[de_{ab} - \omega^c{}_a \wedge e_{cb} - \omega^c{}_b \wedge e_{ac}] + \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial \omega^{ab}}\right)}_{\text{0だと仮定。}}.$$

この要請は1階形式(θとωが独立変数)のωのオイラー・ラグランジュと一致

$$\delta L_{\mathrm{mat}}(\theta, \omega(\theta, d\theta)) = -\delta\theta^a \wedge *T_a + \delta\omega^{ab}(\theta, d\theta) \wedge \frac{\partial L_{\mathrm{mat}}}{\partial \omega^{ab}} \qquad T_a = T_{ab}\theta^b$$

オイラー・ラグランジュ方程式 $\partial L/\partial\theta^c + d(\partial L/\partial d\theta^c) = 0$ は、 $-\frac{1}{2\kappa}e_{abc} \wedge \Omega^{ab} = *T_c \Longleftrightarrow R^a{}_b - \frac{1}{2}R\delta^a_b = \kappa T_b{}^a$

共役運動量 $\pi_a = \dfrac{1}{2\kappa}e_{abc} \wedge \omega^{bc}$　$H(\theta, \pi) = d\theta^a \wedge \pi_a - L = H_{\mathrm{G}}(\theta, \pi) - L_{\mathrm{mat}}(\theta, \omega(\theta, \pi)),$

$$H_{\mathrm{G}}(\theta, \pi) = \frac{D-3}{D-2}(d\theta^a - \Theta^a) \wedge \pi_a$$

D=4では、 $\omega^{ab} = -\frac{\kappa}{4}E^{abnm} * p_{mcn}\theta^c,\ d\theta^a - \Theta^a = \frac{\kappa}{4}E^{abnm} * p_{mcn}\theta^c \wedge \theta_b,\ p_{abc} = \pi_b \wedge e_{ac} + \pi_a \wedge e_{bc} + \pi_c \wedge e_{ab}$

$d\theta^a = \partial H/\partial\pi_a$ は、π_a の定義と等価なこの式となる。

$d\pi_a = \partial H/\partial\theta^a$ は、オイラー・ラグランジュ方程式と等価になる。

現状では、D=4でのみ正準方程式が求められている。
(ω^{ab}をπ_aで表すのが難しい)

	中村[2] (2002)	Nester[4] (2004)	神長[3] (2012)	中嶋[7,8] (2015)
(0)一般論		○(4D)	○	○ Poisson括弧
(1)Scalar場 (spin 0)			○	
(2)Dirac場 (spin 1/2)				●
(3)Proca場	○	○		
(4)電磁場	○	○	○	○
(5)非可換ゲージ場		○	○	
(6)重力場 First order formalism		△		○
Second order formalism without torsion (Dirac field)			○	○ 神長の計算ミスを修正
with torsion (Dirac field)				●

Reference

[1] H. Weyl, Phys. Rev. **46**, 505 (1934).
[2] 中村匡, 物性研究 **79**, 2 (2002).
[3] Y. Kaminaga, EJTP **9**, 199 (2012).
[4] J. M. Nester, Classical and Quantum Gravity **21**, S261 (2004).
[5] I. V. Kanatchikov, Rept. Math. Phys. **41**, 49 (1998).
[6] I. V. Kanatchikov, J. Phys.: Conf. Ser. **442**, 012041 (2013) .
[7] S. Nakajima, arXiv:1510.09048 (EJTPに受理済).
[8] S. Nakajima, 準備中.