

# 机の上で光速を測る — 現代版 Weber-Kohlrausch の実験 (前半 — 歴史と背景)

北野 正雄<sup>1</sup>, 小林弘和<sup>2</sup>

<sup>1</sup> 京都大学工学研究科, <sup>2</sup> 高知工科大学システム工学群

2016年1月10-11日

第5回 QUATUO 研究会

# 光速 $c_0$ の測定

- 木星の衛星イオの食の時間ずれ (Rømer, 1676)  $2 \times 10^8$  m/s
- 恒星の年周光行差 (Bradley, 1727)  $2.95 \times 10^8$  m/s
- 回転歯車 (Fizeau, 1849)  $3.15 \times 10^8$  m/s
- 回転鏡 (Foucault, 1862)  $2.98 \times 10^8$  m/s
- 電気回路 (Weber and Kohlrausch, 1858; Maxwell, 1868)
  - 北野: 大学の物理教育 **21**, 126 (2015)
  - 小林, 北野: 大学の物理教育 **21**, 130 (2015)
- 現在では, 光速は定義値  $c_0 = 299792458$  m/s (1983, CGPM)

# Weber-Kohlrausch の実験

W. Weber and R. Kohlrausch, Annalen der Physik **99**, 10 (1856).

- 同一の電荷を 2 つの単位系 esu, emu で測定し, その比  $c_w = \frac{q_{esu}}{q_{emu}}$  を求める実験 — 光速とは関係はない
- 目的は Weber の式 (相対運動する電荷間の力) における係数  $c_w$  の決定.

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2} \left[ 1 - \frac{1}{c_w^2} \left( \frac{dr}{dt} \right)^2 + \frac{2}{c_w^2} r \frac{d^2 r}{dt^2} \right]$$

- 測定結果:

$$c_w = \frac{q_{esu}}{q_{emu}} \sim 3.1 \times 10^8 \text{ m/s}$$

- Maxwell の慧眼

この値が光速の実測値に近いのは偶然ではなく, 光の実体が電気磁氣的擾乱だからではないか

## 電気力と磁気力の比 (SIにおける Weber の係数)

- 電荷  $q_1, q_2$  の位置  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ , 速度  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ ,  
 $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = r\mathbf{e}_{12}, \quad \mathbf{v}_1 = v_1\mathbf{u}_1, \quad \mathbf{v}_2 = v_2\mathbf{u}_2,$
- $q_2$  に働く 電気力  $\mathbf{F}_e$ , 磁気力  $\mathbf{F}_m$

$$\mathbf{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{r^2} \mathbf{e}_{12}, \quad \mathbf{F}_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_1q_2}{r^2} [\mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{e}_{12})]$$

- 合わせると

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_m = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} [\mathbf{e}_{12} + (\mu_0\epsilon_0)(v_1v_2)\mathbf{u}_2 \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{e}_{12})]$$

すなわち,

$$c_w = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} (=: c_0)$$

電磁波 (光) と関係のない文脈 (静電気, 静磁気) で  $c_0$  が登場する.

# Maxwell の感想

J.C. Maxwell: Phil. Trans. R. Soc. London **155** 459 (1865)

- (In the Weber and Kohlrausch experiment,) **Only use made of light in the experiment was to see the instruments.**
- The value of  $V$  found by Foucault was obtained by determining the angle through which a revolving mirror turned, while the light reflected by it went and returned along a measured course. **No use whatever was made of electricity and magnetism.**

# Maxwell 方程式の波動解

- 変位電流項の導入

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{curl } \mathbf{E}, \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \text{curl } \mathbf{H},$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} = \mu_0^{-1} \text{curl } \mathbf{B} \quad \text{真空の構成方程式}$$

Maxwell は波動解の導出において、4 種類の場合を正しく使い分けている。(E, H は線積分, D, B は面積分) Phil. Trans. **155** 459 (1865)

- $xy$  面内で一様な電磁場. 電場の方向:  $x$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0 E_x) = -\frac{\partial}{\partial z} H_y, \quad \frac{\partial}{\partial t}(\mu_0 H_y) = -\frac{\partial}{\partial z} E_x,$$

- d'Alembert 解

$$E_x(z, t) = f(z - c_0 t) + g(z + c_0 t),$$

$$H_y(z, t) = Z_0 [f(z - c_0 t) - g(z + c_0 t)]$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

# 電磁気の単位系の比較

- SI系 (MKSA)
  - ▶ 4元, 有理
  - ▶ 電荷 (あるいは電流) を独立量とする (単位の大きさの決め方には任意性);  $\epsilon_0 \neq 1$   $\mu_0 \neq 1$
- esu系 (electro-static, 静電系)
  - ▶ 3元, 非有理
  - ▶ 電荷を静電力を通して定義;  $\epsilon_{0,esu} = 1$
- emu系 (electro-magnetic, 電磁系)
  - ▶ 3元, 非有理
  - ▶ 電流を磁気力を通して定義;  $\mu_{0,emu} = 1$
- Gauss系
  - ▶ 3元, 非有理
  - ▶ esu系と emu系の折衷 (場当たりの使い分け. 単位系とは呼べない代物);  $\epsilon_{0,esu} = 1$ ,  $\mu_{0,emu} = 1$

## esu, emu における電荷

- クーロンの法則 (SI vs esu)

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{q_{\text{esu},1} q_{\text{esu},2}}{r^2} \Rightarrow q_{\text{esu}} = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}} q \stackrel{\text{SI}}{\sim} \sqrt{N} \text{ m}$$

- ビオ・サバールの法則 (SI vs emu)

$$F = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(I_1 l_1)(I_2 l_2)}{r^2} = \frac{(I_{\text{emu},1} l_1)(I_{\text{emu},2} l_2)}{r^2} \Rightarrow$$
$$I_{\text{emu}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} I \stackrel{\text{SI}}{\sim} \sqrt{N} \Rightarrow q_{\text{emu}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} q \stackrel{\text{SI}}{\sim} \sqrt{N} \text{ s}$$

- 比

$$c_w = \frac{q_{\text{esu}}}{q_{\text{emu}}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c_0 \stackrel{\text{SI}}{\sim} \text{m/s}$$

SI において  $A/B$  が無次元  $\rightarrow A \stackrel{\text{SI}}{\sim} B$



## Unit conversion for minimalists (SI $\rightarrow$ esu, emu)

- $X_{\text{SI}}$  の単位が  $\text{m}^\alpha \text{kg}^\beta \text{s}^\gamma \text{A}^\delta$  のとき、

$$X_{\text{esu}} = \iota \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \right)^{\delta/2} X_{\text{SI}}$$

$$X_{\text{emu}} = \iota \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \right)^{\delta/2} X_{\text{SI}}$$

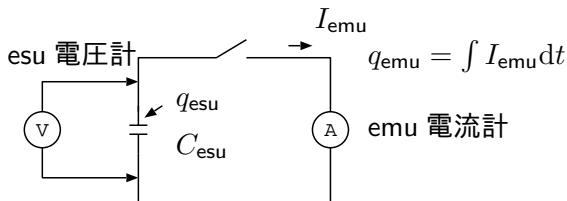
$$\iota = \begin{cases} 4\pi & (X = D, H) \\ 1 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

$X_{\text{esu}}$ ,  $X_{\text{emu}}$  は力学的単位のみで表わされる。

- 例: 抵抗  $R \stackrel{\text{SI}}{\sim} \Omega = \text{W A}^{-2}$

$$R_{\text{esu}} = 4\pi\epsilon_0 R \stackrel{\text{SI}}{\sim} \text{s/m}, \quad R_{\text{emu}} = \frac{4\pi}{\mu_0} R \stackrel{\text{SI}}{\sim} \text{m/s}$$

# Weber-Kohlrausch 実験の手順



- 電荷を蓄えるライデン瓶（コンデンサ）を準備. 標準コンデンサ（球形導体,  $C_{\text{sphere,esu}} = R$ ）を基準にキャパシタンス  $C_{\text{esu}}$  を決定.
- 電荷を蓄えて、esu 電位計で電位  $V_{\text{esu}}$  を測定し,  $q_{\text{esu}} = V_{\text{esu}}/C_{\text{esu}}$  を決定.
- この電荷を円形コイルを通して放電する. 半径  $R$  の円形コイルの中心の磁場は,  $B_{\text{emu}} = 2\pi N I_{\text{emu}}/R$ . これを正接検流計を用いて, 地球磁場  $B_{\text{earth,emu}}$  と比較することで,  $I_{\text{emu}}$  を定量的に定めることができる. 衝撃検流モードを用いることにより, 積分値  $q_{\text{emu}} = \int_0^{\infty} I_{\text{emu}} dt$  が決定される.

# esu 的測定器

Maxwell: A Treatise on Electricity and Magnetism Vol. 1 p. 331

- クーロンのねじり秤
- Thomson の絶対電位計: 平行平板コンデンサの電極にかかる力を天秤で測定し, 電位 ( $\sqrt{\text{dyn}}$ ) や電荷 ( $\sqrt{\text{dyn cm}}$ ) を決定.

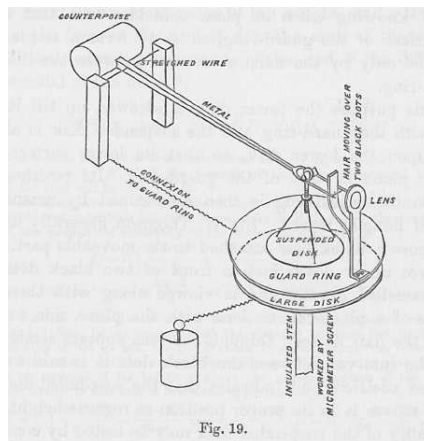
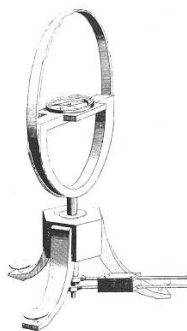
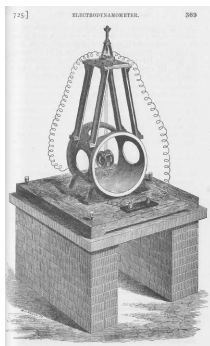


Fig. 19.

# emu 的測定器

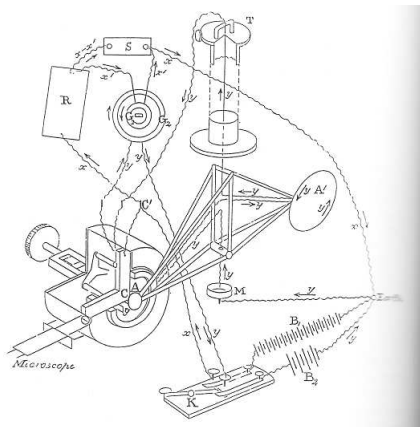
Maxwell: A Treatise on Electricity and Magnetism Vol. 2 p. 369

- Weber's electro-dynamometer: 同じ電流を2つのコイルに流し、コイル間に働く力やトルクから、電流 ( $\sqrt{\text{dyn}}$ ) を決定.
- 正接検流計: 1つのコイルが作る磁場と地磁気との比を磁針の振れで求める方法もある. 地磁気はすでに絶対測定されていた (Gauss).
- 可動コイルのサスペンションを工夫して、力やトルクを時間積分し、電荷 ( $\sqrt{\text{dyn s}}$ ) を求めることもできる。(衝撃検流計)



# Maxwell 自身による実験

J.C. Maxwell: Phil. Trans. R. Soc. London **158** 643 (1868)



# 現代版 Weber-Kohlrausch の実験

- Weber-Kohlrausch の実験は歴史的に大変重要である.
- 教育目的で再現することは意義深い.
- 問題点
  - ▶ 放電電流による磁気力を測定するには, 大きい初期電荷が必要— 高電圧の実験
  - ▶ 力の測定は面倒
  - ▶  $esu, emu$  という古い単位系に関する知識が必要
- SI の観点からは,  $\mu_0, \epsilon_0$  を実測すればよい.
  - ① コイル, コンデンサのリアクタンス測定による  $\mu_0, \epsilon_0$  の個別決定  
北野: マクスウェル方程式 (2005) 相対論の章冒頭の脚注
  - ② LC 共振回路による  $c_0, Z_0$  の測定 (原理を含め後半で)

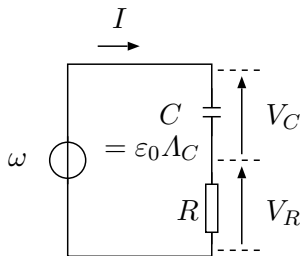
## コンデンサのリアクタンス測定による $\epsilon_0$ の決定

- コンデンサのキャパシタンス — 面積  $S$ , 間隔  $d (\ll \sqrt{S})$

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{DS}{E d} = \epsilon_0 \Lambda_C, \quad \Lambda_C := \frac{S}{d}$$

- 幾何学的長さ  $\Lambda_C$  は物差しで測る.
- リアクタンス  $X_C = 1/(\omega C)$  の測定:  
基準抵抗  $R$  を介して角周波数  $\omega$  の電源に接続し, 電圧比を求める.

$$k_C = \frac{\hat{V}_C}{\hat{V}_R} = \frac{X_C}{R} = \frac{1}{\omega C R} \Rightarrow \epsilon_0 = \frac{1}{k_C R \omega \Lambda_C}$$



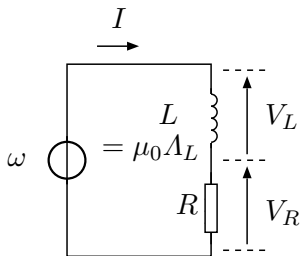
## コイルのリアクタンス測定による $\mu_0$ の決定

- コイルのインダクタンス — 断面積  $S$ , 長さ  $l (\gg \sqrt{S})$ , 巻き数  $n$

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{B}{H} \frac{S}{n^2 l} = \mu_0 \Lambda_L, \quad \Lambda_L := \frac{S}{n^2 l}$$

- 幾何学的長さ  $\Lambda_L$  は物差しで測る.
- リアクタンス  $X_C = \omega L$  の測定:  
基準抵抗  $R$  を介して角周波数  $\omega$  の電源に接続し, 電圧比を求める.

$$k_L = \frac{\hat{V}_L}{\hat{V}_R} = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega L}{R} \Rightarrow \mu_0 = k_L \frac{R}{\omega \Lambda_L}$$





## リアクタンス測定による $c_0$ の決定

- リアクタンス測定で決まった  $\varepsilon_0$ ,  $\mu_0$  から光速が決定できる：

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{k_L}{k_C}} \sqrt{\omega^2 \Lambda_C \Lambda_L}$$

- 同時に真空インピーダンスも決定できる：

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = \sqrt{k_L k_C} \sqrt{\frac{\Lambda_C}{\Lambda_L}} R$$

4つの場  $E$ ,  $B$ ,  $D$ ,  $H$  が関与している

# 具体的なりアクタンス測定

- お手軽には、インピーダンスメータ、LCRメータなどと呼ばれる測定器を用いればよい。
- 正式には、 $L$  または  $C$  に基準抵抗  $R$  を直列につなぎ、発振器に接続し、電圧比を測ればよい。電圧測定は高周波電圧計またはオシロスコープで行う。電圧自体が重要ではなく、比を正確に測るようにする。
- 正確さを必要とする要素
  - ① 発振器の周波数
  - ② 幾何学的長さを測る物差し
  - ③ 基準抵抗

ただし、 $c_0$  については (1), (2) の、 $Z_0$  については (3) の絶対値が重要

# 電磁気学の定数, 単位に関する誤解や混乱

SIにおける  $\mu_0$  の (一見不自然に見える) 定義値  $4\pi \times 10^{-7} \text{ H/m}$  がさまざまな誤解を生んでいる

- 誤解:  $\mu_0$  は単なる定数で物理量ではない.
- 誤解:  $\mu_0 = 1$  となる Gauss 単位系が合理的である. (真空は磁性体ではない.)
- 誤解: 2種類の磁場  $B, H$  があるのはおかしい. ( $H$  は補助場)
- 誤解:  $B$  と  $H$  は同じ単位で測られるべき.

誤解を積極的に広めている教科書の例:

D.F. Griffiths: Introduction to Electrodynamics, 3rd ed. (Prentice Hall, 1999)

太田浩一: 電磁気学の基礎 I, II (東京大学出版会, 2012) 特に p. 22

## $4\pi \times 10^{-7}$ の経緯

- 力に基づく単位 (絶対単位) と電気回路 (標準電池、標準抵抗) に基づく単位 (実用単位) が併存
- 換算係数の簡単化 (実用単位の絶対化) (British Association, 1873)

$$1V_{ab} \leftrightarrow 10^8 \text{emu}, \quad 1\Omega_{ab} \leftrightarrow 10^9 \text{emu}$$

- 絶対アンペアの導入 (第一回国際電気学会 1881)

$$A_{ab} := V_{ab}/\Omega_{ab} \leftrightarrow 10^{-1} \text{emu}$$

- MKSA 単位系 (1954) のアンペアの定義に継承
- 換算式 (SI to emu):  $I_{\text{emu}} = \sqrt{\mu_0/4\pi} I$  に対応する量を代入

$$0.1 \text{emu} = 0.1 \sqrt{\text{dyn}} = \sqrt{10^{-7} \text{N}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} \times 1 \text{A}$$

これより

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{N/A}^2 \quad \text{「力」の時代の名残}$$

# Maxwell の時代の状況

- 19 世紀の半ばの時点では、電気、磁気の担い手である電子やイオンは発見されていない。
- 電子の発見は 1897 年 (J.J. Thomson が陰極線が負の荷電粒子の流れであることをつきとめた) その後、原子モデルが確立されてゆく
- Maxwell の時代は、電荷は電気力を通して、電流は磁気力を通して定義する他はなかった。
- 現在の SI における、電流間の力によるアンペアの定義はこの時代の名残。
- SI の改訂案: “The elementary charge  $e$  is exactly  $1.60217X \times 10^{19}$  coulomb.”  
⇒  $\mu_0$  の値は定義値ではなくなる。

# Watt-balance

[http://www.bipm.org/en/bipm/mass/watt-balance/wb\\_bip\\_m.html](http://www.bipm.org/en/bipm/mass/watt-balance/wb_bip_m.html)

- ワット バランス — 質量を電磁的に測定する装置 **主客転倒**

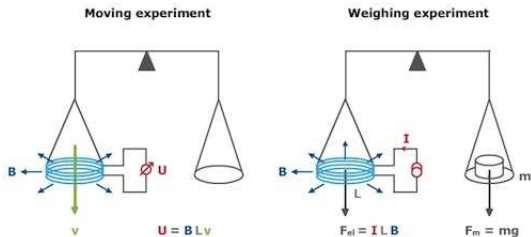


# Watt-balance の原理

<http://sciencelearn.nz.org>

- moving mode:  $U = BLv$
- weighing mode:  $BLI = mg$
- 電气的仕事率 = 力学的仕事率

$$IU = mgv$$



# 電磁気学の定数間の関係

真空の定数		定義値	概略値	関係式
誘電率	$\epsilon_0$	<del><math>1/(c_0^2 \mu_0)</math></del>	8.854 pF/m	$1/(c_0 Z_0)$
透磁率	$\mu_0$	<del><math>4\pi \times 10^{-7}</math> H/m</del>	1.257 nH/m	$Z_0/c_0$
光速	$c_0$	299 792 458 m/s	$2.998 \times 10^8$ m/s	$1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$
インピーダンス	$Z_0$	<del><math>c_0 \mu_0</math></del>	376.7 $\Omega$	$\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$

- アンペアの定義が改訂後は  $c_0$  のみが定義値
- 数値的には,  $Z_0 = 376.7 \Omega$  を記憶するのが便利. ( $\epsilon_0, \mu_0$  は直ちに計算できる.)



## 真空のインピーダンス $Z_0$

- 真空の誘電率:  $\epsilon_0$ , 真空の透磁率:  $\mu_0$
- 光速  $c_0$  (Maxwell 1861, Weber & Kohlrausch 1857)

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

- 真空のインピーダンス  $Z_0$  (Schelkunoff 1938) — 70年遅刻

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (= Y_0^{-1})$$

- 独立なパラメータの自然な組

$$(\epsilon_0, \mu_0) \leftrightarrow (c, Z_0)$$

- 多くの教科書では,  $(\epsilon_0, c_0)$ ,  $(\mu_0, c_0)$ . —  $Z_0$  の無視, 軽視.

# 真空のインピーダンス $Z_0$ の登場場面

## ① 波動インピーダンス

$$\begin{bmatrix} E_x \\ H_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_0 \\ 1 \end{bmatrix} f(z - c_0 t) + \begin{bmatrix} -Z_0 \\ 1 \end{bmatrix} g(z + c_0 t)$$

## ② 源 (Source) と場 (Field) の関係 / 構成方程式

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= Z_0(c_0 \mathbf{D}) \\ c_0 \mathbf{B} &= Z_0 \mathbf{H} \end{aligned}$$

## ③ 基本定数

- ▶ プランク電荷:  $q_P = \sqrt{\frac{2\hbar}{Z_0}} = \sqrt{4\pi\epsilon_0\hbar c_0}$
- ▶ 微細構造定数:  $\alpha = \left(\frac{e}{q_P}\right)^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c_0}$
- ▶ 磁気単極 (Dirac):  $g_0 = \frac{Z_0}{2\alpha} e$

## $Z_0$ の意義

- プランク電荷  $q'_P \stackrel{\text{SI}}{\sim} \text{C} = \text{As}$ , プランク磁束 (磁荷)  $\Phi'_P \stackrel{\text{SI}}{\sim} \text{Wb} = \text{Vs}$   
プランク定数  $\hbar \stackrel{\text{SI}}{\sim} \text{Js}$ , 真空インピーダンス  $Z_0 \stackrel{\text{SI}}{\sim} \Omega$

$$q'_P \Phi'_P = \hbar \quad (\text{作用}) \quad \Phi'_P / q'_P = Z_0 \quad (\text{抵抗})$$

- 自然単位系のための正規化変数

$$q'_P = \sqrt{\hbar / Z_0} \sim 5.29 \times 10^{-19} \text{ C}, \quad \Phi'_P = \sqrt{\hbar Z_0} \sim 1.99 \times 10^{16} \text{ Wb}$$

- 微細構造定数

$$\alpha = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{e}{q'_P} \right)^2 \stackrel{\text{SI}}{\sim} 1$$

- von Klitzing 定数

$$R_K = \frac{h}{e^2} = \frac{Z_0}{2\alpha}$$

- 磁束量子

$$\Phi_0 = K_J^{-1} = \frac{h}{2e} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \Phi'_P$$

# 電磁気諸量の関係

F(力) 系列  
 $(\phi, c_0 \mathbf{A})$

$$-\nabla\phi - \partial_t \mathbf{A} = \mathbf{E}$$

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$$

$(\mathbf{E}, c_0 \mathbf{B})_2$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \partial_t \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

0

S(源) 系列

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$$

$\leftarrow * \rightarrow$   $(c_0 \mathbf{D}, \mathbf{H})_2$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

$(c_0 \rho, \mathbf{J})_3$

d ↓

0

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} - \partial_t \mathbf{D}$$

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{D}$$

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{J} + \partial_t \rho$$

## LC 共振回路による $c_0, Z_0$ の決定

- LC 共振回路を用いると,  $\varepsilon_0, \mu_0$  を介さずに,  $c_0, Z_0$  を求めることができる.
- 詳細は後半で.

## 番外編 — つぶやき

- 一部に見られる Gauss 単位系の溺愛傾向は憂慮すべき
  - ▶ 重要な定数である  $\mu_0, \varepsilon_0$  の軽視や排除
  - ▶  $D, H$  の物理的意味の剥奪 (補助場扱い)
  - ▶ 結果, 電磁気の体系性, 美しさを大きく損なっている
- 教育上も悪影響
  - ▶ いくつかの有名な教科書, 教育関係の雑誌の論文での, Gauss 単位系の推奨, SI の非難
  - ▶ 物理学実験で電磁気の定数 ( $c_0$  以外) が測られることはまれ. ( $h, k_B, g, N_A$  などによく測られる.)
- 旧世代とともに, 旧単位系の早期退場が望まれる
  - しかし, 教育による再生, 残存効果が大きい
- 古い単位を温存している研究分野も, e.g., 磁性, スピントロニクス
  - グラフのラベルが  $H$  (Oe) のまま. 中には  $H$  (mT) というのまで.