不確定性関係
— Heisenberg, Ozawa, Branciard

北野 正雄

京都大学工学研究科

2015.1.12

第 4 回 QUATUO 研究会@高知工科大学

不確定性原理の歴史

- ガンマ線顕微鏡の思考実験 — Heisenberg (1927)
  - 量子の相補性 (粒子性と波動性) の試金石— 量子論の中心概念の１つ
  - 演算子の交換関係 (非可換性) との関係
- 「測定の誤差」,「測定による擾乱」の正確な定義 (間接測定モデル)
  小澤不等式 — ハイゼンベルク不等式の破綻を主張—
  M. Ozawa: Phys. Lett. A **318**, 21 (2003)
- 「誤差」,「擾乱」を適切に再定義すれば, 破綻していない
  — MK, arXiv:0803.4377 (2008)
  (再定義しない場合、連続系（正準交換関係）では、Ozawa 限界より厳密な限界 — Branciard 限界の例)
- Branciard 不等式 — 一般的な枠組みで、Ozawa 限界より厳しい限界を導出
  — C. Branciard: PNAS **110**, 6742 (2013).

不確定性３種— 位置：$\hat{q}$, 運動量：$\hat{p}$

- 状態の不確定性 (URs)　Robertson

$$\sigma(\hat{q})\sigma(\hat{p}) \geq \hbar/2$$

- 測定の不確定性 (URm)　Heisenberg-Authurs-Kelly

$$\epsilon(\hat{q})\eta(\hat{p}) \geq \hbar/2$$

- 同時測定の不確定性 (URj)

$$\epsilon(\hat{q})\epsilon(\hat{p}) \geq \hbar/2$$

$\sigma(\hat{A})$: 物理量 $\hat{A}$ の状態 $|\psi\rangle$ に対するバラツキ

$$\sigma(\hat{A}) = \langle\psi|\delta\hat{A}^2|\psi\rangle^{1/2}, \quad \delta\hat{A} = \hat{A} - \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle\hat{1}$$

$\epsilon(\hat{A})$: $\hat{A}$ の測定の精度, 誤差

$\eta(\hat{A})$: $\hat{A}$ に対する測定の擾乱, 反作用

状態の不確定性 (URs)

- 状態の不確定性 (URs) は正準交換関係 $[\hat{q}, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar\hat{1}$ から簡単に求めることができる.
- 正準交換関係の 2 重性

$$
\begin{aligned}
\hat{p} &= \hbar\hat{k} \quad &&\text{(粒子性)}\\
[\hat{q}, \hat{k}] &= \mathrm{i}\hat{1} \quad &&\text{(波動性)}\\
&&&(\rightarrow \hat{k} = \mathrm{i}d/dq, \quad \text{フーリエ変換の関係})
\end{aligned}
$$

- 他の不確定性 (URm, URj) の根拠を与えている
- 測定の不確定性 (URm) の導出が明確に行われることは極めて稀である (URs の証明でお茶を濁している)

URs の証明 — Schwarz 不等式

- 交換しない物理量 $\hat{A}$, $\hat{B}$ — $[\hat{A}, \hat{B}] = 2\mathrm{i}\hat{C}$
- 与えられた状態 $|\psi\rangle$ に対する期待値 $\langle\hat{A}\rangle := \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$
- 平均からのズレの演算子 $\delta\hat{A} = \hat{A} - \langle\hat{A}\rangle\hat{1}$
  — $[\delta\hat{A}, \delta\hat{B}] = 2\mathrm{i}\hat{C}$
- 実数 λ に対して $\hat{D}_\lambda := \delta\hat{A} + \mathrm{i}\lambda\delta\hat{B}$

$$
\begin{aligned}
0 \leq ||\hat{D}_\lambda|\psi\rangle||^2 &= \langle\hat{D}_\lambda^\dagger\hat{D}_\lambda\rangle = \langle(\delta\hat{A} - \mathrm{i}\lambda\delta\hat{B})(\delta\hat{A} + \mathrm{i}\lambda\delta\hat{B})\rangle \\
&= \langle\delta\hat{A}^2\rangle + 2\lambda\langle\hat{C}\rangle + \lambda^2\langle\delta\hat{B}^2\rangle
\end{aligned}
$$

- 不等式が λ によらず成立するためには, 判別式 ≤ 0

$$\langle\delta\hat{A}^2\rangle\langle\delta\hat{B}^2\rangle \geq \langle\hat{C}\rangle^2$$

- 正準交換関係 $[\hat{q}, \hat{p}] = \mathrm{i}\hbar$ (連続系) に対しては

$$\sigma(\hat{q})\sigma(\hat{p}) = \sqrt{\langle\delta\hat{q}^2\rangle\langle\delta\hat{p}^2\rangle} \geq \frac{\hbar}{2}$$

正準交換関係は離散系では実現不可

- エルミート演算子 $\hat{A}$, $\hat{B}$ が正準交換関係 $[\hat{A}, \hat{B}] = \mathrm{i}\hat{1}$ を満たすとする．
- $\hat{A}$ が対角的な基底をとると，

$$\hat{A} = \sum_i a_i |i\rangle\langle i|, \quad \hat{B} = \sum_j \sum_k b_{jk} |j\rangle\langle k|$$

- 交換関係は

$$(a_j - a_k) b_{jk} = \mathrm{i}\delta_{jk}$$

- $j = k$ に対して，$0 = \mathrm{i}$ となるので矛盾．

連続系では OK

- エルミート演算子 $\hat{A}, \hat{B}$ が正準交換関係 $[\hat{A}, \hat{B}] = \mathrm{i}\hat{1}$ を満たすとする．
- $\hat{A}$ が対角的な基底をとると，

$$\hat{A} = \int \mathrm{d}a\, a|a\rangle\langle a|, \quad \hat{B} = \int \mathrm{d}a' \int \mathrm{d}a''\, b(a', a'')|a'\rangle\langle a''|$$

- 交換関係は

$$(a' - a'')b(a', a'') = \mathrm{i}\delta(a' - a'')$$

- $b(a', a'') = -\mathrm{i}\delta'(a' - a'')$ は上の関係を満たす．
- a 表示では

$$\langle a|\hat{A}|\psi\rangle = a\psi(a) \quad \langle a|\hat{B}|\psi\rangle = \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\psi(a)$$

つまり，$\left[a, \frac{1}{\mathrm{i}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\right] = \mathrm{i}$

離散系の面倒さ

- 離散系に対する URs は, $[\hat{A}, \hat{B}] = 2\mathrm{i}\hat{C}$ に対して

$$\langle \delta \hat{A}^2 \rangle \langle \delta \hat{B}^2 \rangle \geq \langle \hat{C} \rangle^2$$

右辺が状態依存であることに注意.

- 状態無依存の下限を求める努力がされているが, 単純な結果は得られていない. (entropic uncertainty relations)
S. Wehner and A. Winter: New J. Phys. 12 (2010) 025009
- 離散系に対する URm はうまく表現できない. — 無理に定義できないことはないが, 物理的意味が不明.
Erhart, Sponar, Sulyok, Badurek, Ozawa, and Hasegawa: Nature Physics (2012) doi:10.1038/nphys2194

Cauchy-Schwarz 不等式

- 複素ベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対する Cauchy-Schwarz の不等式

$$||\boldsymbol{a}||^2||\boldsymbol{b}||^2 \geq |(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})|^2$$

  内積 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) = \sum_k a_k^* b_k \in \mathbb{C}$.
- 状態を $|\psi\rangle$, 物理量（エルミート演算子）を $\hat{A}$, $\hat{B}$.
  ずれ演算子を定義: $\delta\hat{A} := \hat{A} - \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle\hat{1}$, ...

$$|a\rangle := \delta\hat{A}|\psi\rangle, \quad |b\rangle := \delta\hat{B}|\psi\rangle$$

- $|a\rangle$, $|b\rangle$ に対する Cauchy-Schwarz 不等式:
  $\langle a|a\rangle\langle b|b\rangle \geq |\langle a|b\rangle|^2$, i.e.,

$$\langle\delta\hat{A}^2\rangle\langle\delta\hat{B}^2\rangle \geq |\langle\delta\hat{A}\delta\hat{B}\rangle|^2$$

- 右辺は

$$|\langle\delta\hat{A}\delta\hat{B}\rangle|^2 = \left|\mathrm{Re}\langle\delta\hat{A}\delta\hat{B}\rangle + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\langle\delta\hat{A}\delta\hat{B}\rangle\right|^2$$
$$\geq \left(\mathrm{Im}\langle\delta\hat{A}\delta\hat{B}\rangle\right)^2 = \frac{|\langle[\delta\hat{A},\delta\hat{B}]\rangle|^2}{4}$$

Cauchy-Schwarz 不等式(2)

- 式変形の最後で内積の実部を無視することで不等号を重ねている点が気にかかる。
- $\langle a|b\rangle = |\langle a|b\rangle|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ であるとする。

$$|b'\rangle = \delta\hat{B}'|\Psi\rangle, \quad \delta\hat{B}' = \mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\delta\hat{B}$$

とおくと、$\langle a|b'\rangle = \mathrm{i}|\langle a|b\rangle|$ は純虚数となる。$|\Psi\rangle$, $\hat{A}$, $\hat{B}'$ に対する Cauchy-Schwarz 不等式は

$$\langle\delta\hat{A}^2\rangle\langle\delta\hat{B}'^2\rangle \geq= \frac{|\langle[\delta\hat{A}, \delta\hat{B}']\rangle|^2}{4}$$

$\delta\hat{B}'$ をすべて $\delta\hat{B}$ に置き換えても式の形は変わらない。($\delta\hat{B}'$ はエルミートではないが、正規である。)

測定のモデル

- URm (あるいは URj) の導出には間接測定モデルが不可欠
  —「誤差」,「擾乱」の数学的定義
- 直接測定モデル
  - 射影仮説, ボルンの確率規則を対象系に直接適用
  - 測定精度, 測定の反作用 (擾乱) を定量的に扱えない
- 間接測定モデル
  - 第 1 段階: 対象系と測定装置 (プローブ) の (量子的) 相互作用
  - 第 2 段階: プローブに対して直接測定を実施

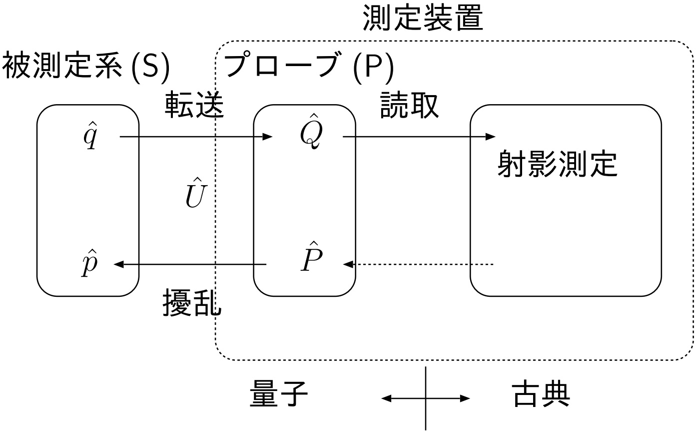
連続系の間接測定モデル

- 被測定系 S : $(\hat{q}, \hat{p})$ — $\hat{q}$: 被測定量, $\hat{p}$: 共役量
- プローブ系 P : $(\hat{Q}, \hat{P})$ — $\hat{Q}$: メータ量, $\hat{P}$: 共役量
- 正準交換関係 $[\hat{q}, \hat{p}] = [\hat{Q}, \hat{P}] = \mathrm{i}\hbar\hat{1}$
- 初期状態 $|\Psi_{\mathsf{tot}}\rangle = |\psi\rangle \otimes |\Psi\rangle$, $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_{\mathsf{S}}$, $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{\mathsf{P}}$
- 測定相互作用 $\hat{U}$ (ユニタリ)
  — 有限時間作用させ, 系 S, P 間にエンタングルメント形成

$$|\Psi'_{\mathsf{tot}}\rangle = \hat{U}|\Psi_{\mathsf{tot}}\rangle$$

- 系 P に対して $\hat{Q}$ の射影測定を行い測定値を得る
  — $\hat{q}$ の値を推定 (誤差を伴う)
- 系 S の $\hat{p}$ は、上記操作の影響（擾乱）を受ける

間接測定の概要



理想測定

- 理想的な測定のための相互作用

$$\hat{Q}' := \hat{U}^\dagger \hat{Q} \hat{U} = \hat{Q} + \hat{q}, \quad \hat{p}' := \hat{U}^\dagger \hat{p} \hat{U} = \hat{p} - \hat{P}$$

— $\hat{Q}'$, $\hat{p}'$ は測定相互作用後の値 (ハイゼンベルク描像)

- 誤差演算子 $\hat{E}$, 擾乱演算子 $\hat{D}$

$$\hat{E} := \hat{Q}' - \hat{q}, \quad \hat{D} := \hat{p}' - \hat{p}$$

— 理想測定の場合は $\hat{E} = \hat{Q}$, $\hat{D} = -\hat{P}$

- 誤差と擾乱の定義

$$\epsilon := \langle \hat{E}^2 \rangle^{1/2} = \langle \hat{Q}^2 \rangle^{1/2} \geq \sigma(\hat{Q})$$
$$\eta := \langle \hat{D}^2 \rangle^{1/2} = \langle \hat{P}^2 \rangle^{1/2} \geq \sigma(\hat{P})$$

- これより，理想測定に対する URm が得られる

$$\epsilon\eta = \sigma(\hat{Q})\sigma(\hat{P}) \geq \frac{\hbar}{2}$$

Branciard 不等式

- 同時測定に関する誤差のトレードオフ関係　— Ozawa 不等式より厳しい限界

$$\tilde{\epsilon}_A^2 + \tilde{\epsilon}_B^2 + 2\sqrt{1 - \tilde{C}_{AB}^2}\,\tilde{\epsilon}_A \tilde{\epsilon}_B \geq \tilde{C}_{AB}^2 \tag{1}$$

ただし、

$$\tilde{\epsilon}_A := \frac{\epsilon_A}{\Delta A}, \quad \tilde{\epsilon}_B := \frac{\epsilon_B}{\Delta B}, \quad \tilde{C}_{AB} := \frac{C_{AB}}{\Delta A \Delta B} \tag{2}$$

C. Branciard: PNAS **110**, 6742 (2013).

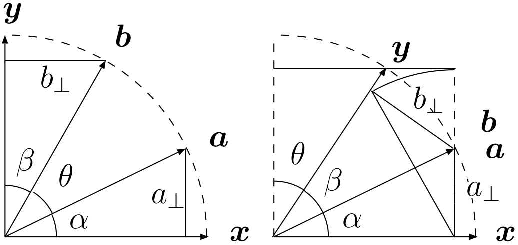
Branciard 不等式の導出

- 3 角関数に関する恒等式

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta = \sin^2(\alpha+\beta)$$

- 実ベクトル空間の単位ベクトル: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$

$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} = 0, \quad \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \cos\theta = \chi, \quad \chi_\perp = \sqrt{1-\chi^2},$$
$$\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{a} = \cos\alpha, \quad \boldsymbol{y}\cdot\boldsymbol{b} = \cos\beta, \quad a_\perp := \sin\alpha, \quad b_\perp := \sin\beta$$



- 4 つのベクトルが同一平面にあれば、$\alpha+\beta = \pi/2-\theta$:

$$a_\perp^2 + b_\perp^2 + 2\sqrt{1-\chi^2}\,a_\perp b_\perp = \chi^2$$

Branciard 不等式の導出 (2)

- 4 つのベクトルが同じ平面内にあるとは限らない場合: $\theta \geq \pi/2 - (\alpha + \beta)$. 等式が不等式になる；

$$a_\perp^2 + b_\perp^2 + 2\sqrt{1-\chi^2}a_\perp b_\perp \geq \chi^2$$

- 非正規直交ベクトル $\boldsymbol{x}' = c_x \boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}' = c_y \boldsymbol{y}$ $||\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{a}|| \geq a_\perp$, $||\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{b}|| \geq b_\perp$
- 根拠となる不等式

$$||\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{a}||^2 + ||\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{b}||^2 + 2\sqrt{1-\chi^2}||\boldsymbol{x}' - \boldsymbol{a}||||\boldsymbol{y}' - \boldsymbol{b}|| \geq \chi^2$$

ヒルベルト空間の実数化

- 正規直交基底 $\{|k\rangle\}_{k=1,2,\ldots N}$, $\langle k'|k\rangle = \delta_{k'k}$ で (N-次元) 状態ベクトル $|\psi\rangle$ を展開

$$|\psi\rangle = \sum_{k=1}^{N} \psi_k |k\rangle, \quad \psi_k = \psi'_k + \mathrm{i}\psi''_k$$

$|\psi\rangle$ を ($2N$-次元) 実ベクトル $\boldsymbol{\psi}$ として表す

$$|\psi\rangle \mathrel{\hat{=}} \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} \psi'_1 \\ \vdots \\ \psi'_N \\ \psi''_1 \\ \vdots \\ \psi''_N \end{bmatrix}$$

ヒルベルト空間の実数化 (2)

- 状態 $|x\rangle$, $|y\rangle$ に対して実ベクトルを $|x\rangle \overset{\circ}{=} \boldsymbol{x}$, $(-\mathrm{i})|y\rangle \overset{\circ}{=} \boldsymbol{y}$ と対応づける。

$$||\boldsymbol{x}||^2 = \sum_k (x_k'^2 + x_k''^2) = \langle x|x\rangle,$$

$$||\boldsymbol{y}||^2 = \sum_k (y_k''^2 + y_k'^2) = \langle y|y\rangle,$$

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_k (x_k' y_k'' - x_k'' y_k') = \mathrm{Im}\langle x|y\rangle$$

これによって、「実ベクトルの内積」が「複素ベクトルの内積の虚部」を与える。

Branciard の不等式

- 状態（ 系+プローブ）$\Psi = |\psi\rangle \otimes |\xi\rangle$ を固定する。系の物理量 $\hat{A}$, $\hat{B}$ の期待値がゼロになるように原点をずらせる。
- 標準偏差

$$\Delta A := \sqrt{\langle \Psi | \hat{A}^2 | \Psi \rangle} = \sqrt{\langle \hat{A}^2 \rangle}, \quad \Delta B := \sqrt{\langle \hat{B}^2 \rangle},$$

- エルミート 演算子 $\hat{A}$, $\hat{B}$ の交換子 $[\hat{A}, \hat{B}] = 2\mathrm{i}\hat{C}$. $\hat{C}$ もエルミート .

$$C_{AB} := \langle \Psi | \hat{C} | \Psi \rangle = \frac{1}{2\mathrm{i}} \langle \Psi | [\hat{A}, \hat{B}] | \Psi \rangle$$

Brancird の不等式 (2)

- 全体系のエルミート演算子 $\hat{X}, \hat{Y}$ をそれぞれ、$\hat{A}, \hat{B}$ を「近似」する物理量とする。これらは交換可能 $[\hat{X}, \hat{Y}] = 0$ で同時測定できる。
- $|\Psi\rangle$ に対する期待値はいずれもゼロとする。$\langle\hat{X}\rangle = \langle\hat{Y}\rangle = 0.$
- 4 つのケット

$$|a\rangle := \frac{\hat{A}}{\Delta A}|\Psi\rangle, \quad |x\rangle := \frac{\hat{X}}{\Delta A}|\Psi\rangle,$$
$$|b\rangle := \frac{\hat{B}}{\Delta B}|\Psi\rangle, \quad |y\rangle := \frac{\hat{Y}}{\Delta B}|\Psi\rangle,$$

に対して、

$$|a\rangle \mathrel{\mathring{=}} \boldsymbol{a}, \quad (-\mathrm{i})|b\rangle \mathrel{\mathring{=}} \boldsymbol{b}$$
$$|x\rangle \mathrel{\mathring{=}} \boldsymbol{x}, \quad (-\mathrm{i})|y\rangle \mathrel{\mathring{=}} \boldsymbol{y}$$

のように実ベクトルを対応させる。

Branciard の不等式 (3)

- これらの実ベクトルの長さ、内積は以下のとおり

$$
\begin{aligned}
||\boldsymbol{a}||^2 &= \langle a|a\rangle = \frac{\langle \hat{A}^2\rangle}{\Delta A^2} = 1,\\
||\boldsymbol{b}||^2 &= \langle b|b\rangle = \frac{\langle \hat{B}^2\rangle}{\Delta B^2} = 1,\\
\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} &= \mathrm{Im}\langle a|b\rangle = \frac{1}{2\mathrm{i}}\frac{\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle}{\Delta A\Delta B} == \frac{C_{AB}}{\Delta A\Delta B}\\
||\boldsymbol{x}||^2 &= \langle x|x\rangle = \frac{\langle \hat{X}^2\rangle}{\Delta A^2},\\
||\boldsymbol{y}||^2 &= \langle y|y\rangle = \frac{\langle \hat{Y}^2\rangle}{\Delta B^2},\\
\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y} &= 0
\end{aligned}
$$

$$
||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}|| = \langle\Psi|\frac{(\hat{X}-\hat{A})^2}{\Delta A^2}|\Psi\rangle =: \frac{\epsilon_A^2}{\Delta A^2},
$$

一般的な測定相互作用

- 基底 $\{|q\rangle \otimes |Q\rangle\}$ — $\hat{q}|q\rangle = q|q\rangle$, $\hat{Q}|Q\rangle = Q|Q\rangle$
- 理想測定の場合 (シュレディンガー描像)

$$\hat{U} : |q\rangle|Q\rangle \to |q\rangle|Q+q\rangle$$

- プローブに忠実に情報 q が移っている．
  被測定系は影響を受けていない．
- 一般化 (変数の線形的変換) $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\hat{U} : |q\rangle|Q\rangle \to \sqrt{\Delta}|dq + cQ\rangle|aQ + bq\rangle, \quad \Delta = ad - bc > 0$$

— $\sqrt{\Delta}$ はユニタリ性のため

- ハイゼンベルク描像では

$$\begin{bmatrix} \hat{Q}' \\ \hat{q}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{Q} \\ \hat{q} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} \hat{p}' \\ \hat{P}' \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} a & -b \\ -c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p} \\ \hat{P} \end{bmatrix}$$

一般相互作用の分類 (標準形)

- 一般測定 (ハイゼンベルク描像)

$$\hat{Q}' = a\hat{Q} + b\hat{q}, \quad \hat{p}' = a'\hat{p} - b'\hat{P}, \quad \text{where} a' = a/\Delta, b' = b/\Delta.$$

- 測定前後の系 S, P に対してそれぞれスケール変換を行うことで標準形に

(O)	$\hat{Q}' = \hat{Q} + \hat{q}, \quad \hat{p}' = \hat{p} - \hat{P}$	$(ab \neq 0)$	理想測定
(A)	$\hat{Q}' = \hat{q}, \quad \hat{p}' = -\hat{P}$	$(a = 0, b \neq 0)$	スワップ
(B)	$\hat{Q}' = \hat{Q}, \quad \hat{p}' = \hat{p}$	$(b = 0, a \neq 0)$	無測定

- 誤差と擾乱

(O)	$\epsilon \geq \sigma(\hat{Q}), \quad \eta \geq \sigma(\hat{P}),$	$\epsilon\eta \geq \hbar/2$
(A)	$\epsilon = 0, \quad \eta \geq \left[\sigma(\hat{P})^2 + \sigma(\hat{p})^2\right]^{1/2} < \infty$	$\epsilon\eta = 0?$
(B)	$\eta = 0, \quad \epsilon \geq \left[\sigma(\hat{Q})^2 + \sigma(\hat{q})^2\right]^{1/2} < \infty$	$\epsilon\eta = 0?$

- 相互作用前後の変数に関するスケール変換

$$\hat{Q} \to \Lambda \hat{Q}, \hat{P} \to \Lambda^{-1} \hat{P},$$
$$\hat{q} \to \lambda \hat{q}, \hat{p} \to \lambda^{-1} \hat{p},$$
$$\hat{q}' \to \mu \hat{q}', \hat{p}' \to \mu^{-1} \hat{p}'$$

- 測定のパラメータの変換

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \Lambda a & \lambda b \\ \mu \Lambda c & \mu \lambda d \end{bmatrix}$$
$$\Delta \to \Lambda \lambda \mu \Delta$$

- 場合分け

(O) $\Lambda = 1/a, \lambda = 1/b, \mu = ab/\Delta (ab \neq 0)$

(A) $\Lambda = -1/c, \lambda = 1/b, \mu = 1 (a = 0, b \neq 0)$

(B) $\Lambda = 1/a, \lambda = 1/d, \mu = 1 (a \neq 0, b = 0)$

小澤不等式

- タイプ (A), (B) ではハイゼンベルクの不等式 (HUR) が破れているように見える
- この問題を解決するために, 新しい不等式 (OUR) が提案されている

$$\epsilon\eta + \epsilon\sigma(\hat{p}) + \sigma(\hat{q})\eta \geq \hbar/2$$

— M. Ozawa: Phys. Lett. A **318**, 21 (2003)

- タイプ (A), (B) でも破綻しない

$$\begin{array}{llll} \text{(A)} & \epsilon = 0 & \rightarrow & \sigma(\hat{q})\eta \geq \hbar/2 \\ \text{(B)} & \eta = 0 & \rightarrow & \epsilon\sigma(\hat{p}) \geq \hbar/2 \end{array}$$

小澤不等式の証明

- 測定相互作用後の交換関係

$$[\hat{Q}', \hat{p}'] = [a\hat{Q} + b\hat{q}, a'\hat{p} - b'\hat{P}] = \mathrm{i}\hbar(-ab' + ba') = 0$$

$$\text{i.e.}\, 0 = [\hat{q} + \hat{E}, \hat{p} + \hat{D}] = \mathrm{i}\hbar + [\hat{q}, \hat{D}] + [\hat{E}, \hat{p}] + [\hat{E}, \hat{D}]$$

- 両辺の期待値, 三角（ 四角?） 不等式を用いて

$$\langle [\hat{E}, \hat{D}] \rangle + \langle [\hat{q}, \hat{D}] \rangle + \langle [\hat{E}, \hat{p}] \rangle = -\mathrm{i}\hbar$$

$$|\langle [\hat{E}, \hat{D}] \rangle| + |\langle [\hat{q}, \hat{D}] \rangle| + |\langle [\hat{E}, \hat{p}] \rangle| \geq \hbar$$

- $\forall \hat{A},\ \hat{B} :\ \sigma(\hat{A})\sigma(\hat{B}) \geq (1/2)|\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|$ を用いて,

$$\sigma(\hat{E})\sigma(\hat{D}) + \sigma(\hat{q})\sigma(\hat{D}) + \sigma(\hat{E})\sigma(\hat{p}) \geq \hbar/2$$

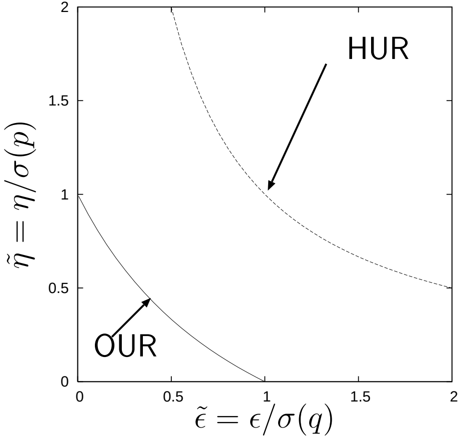
すなわち, $\epsilon\eta + \sigma(\hat{q})\eta + \epsilon\sigma(\hat{p}) \geq \hbar/2$

比較

- 規格化変数 $\tilde{\epsilon} = \epsilon/\sigma(\hat{q})$, $\tilde{\eta} = \eta/\sigma(\hat{p})$

$$\tilde{\epsilon}\tilde{\eta} \geq 1 \qquad \text{HUR}$$

$$\tilde{\epsilon}\tilde{\eta} + \tilde{\epsilon} + \tilde{\eta} \geq 1 \qquad \text{OUR}$$



一般測定における不確定関係

- 一般測定 $\hat{Q}' = a\hat{Q} + b\hat{q}, \quad \hat{p}' = a'\hat{p} - b'\hat{P}$
- 誤差, 擾乱演算子

$$\hat{E} = a\hat{Q} + (b-1)\hat{q}, \quad \hat{D} = (a'-1)\hat{p} - b'\hat{P}$$

- 誤差, 擾乱

$$\epsilon^2 = \langle \hat{E}^2 \rangle = a^2\sigma^2(\hat{Q}) + (b-1)^2\sigma^2(\hat{q})$$
$$\eta^2 = \langle \hat{D}^2 \rangle = (a'-1)^2\sigma^2(\hat{p}) + b'^2\sigma^2(\hat{P})$$

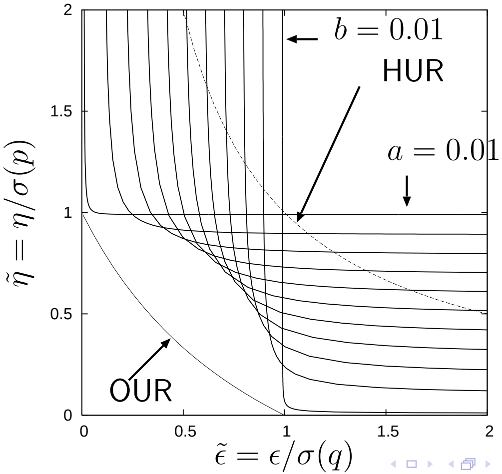
- 初期状態のバラツキ比: $w = \dfrac{\sigma(\hat{Q})}{\sigma(\hat{q})} = \dfrac{\sigma(\hat{p})}{\sigma(\hat{P})}$

$$\tilde{\epsilon}^2(w) = a^2w^2 + (b-1)^2, \quad \tilde{\eta}^2(w) = (a'-1)^2 + b'^2w^{-2}$$

- トラジェクトリ $\{(\tilde{\epsilon}(w), \tilde{\eta}(w)) \,|\, 0 \le w \le \infty\}$

トラジェクトリ $a+b=1,\ \Delta=1$

- OUR は一般の測定で破られることはない
- 理想測定 (O) ($a'=b=1$) の場合以外は, w を調整すれば, HUR は必ず破れる.
- しかし, w にかかわらず, HUR を破ることはできない.



誤差と擾乱の再定義

- 一般測定：$\hat{Q}' = a\hat{Q} + b\hat{q}, \quad \hat{p}' = a'\hat{p} - b'\hat{P}$
- 利得を考慮した(入力換算)誤差 $\hat{E}_*$ と擾乱 $\hat{D}_*$ 演算子

$$\hat{Q}' = b(\hat{q} + \hat{E}_*), \quad \hat{p}' = a'(\hat{p} + \hat{D}_*)$$

- 代入すると，

$$\hat{E}_* := \frac{1}{b}\hat{Q}' - \hat{q} = \frac{a}{b}\hat{Q}, \quad \hat{D}_* := \frac{1}{a'}\hat{p}' - \hat{p} = -\frac{b}{a}\hat{P}$$

- 新しい誤差と擾乱

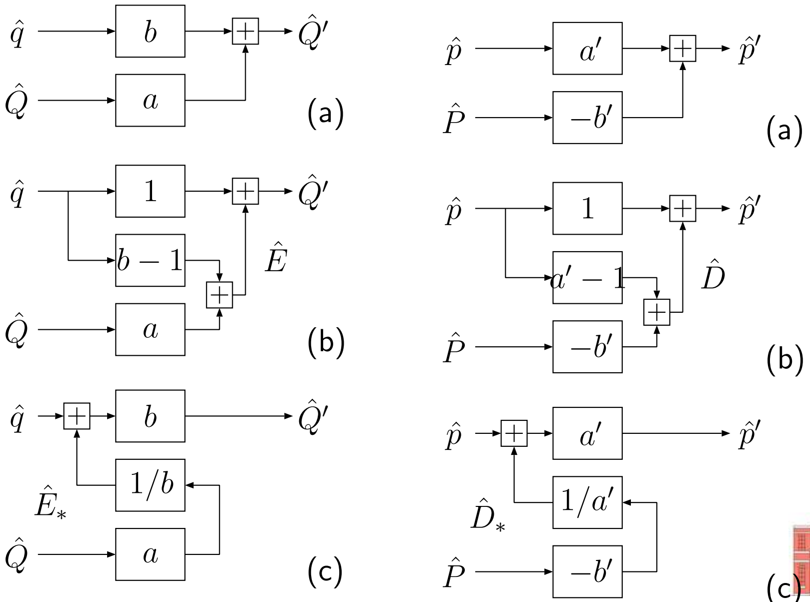
$$\epsilon_*^2 = \langle \hat{E}_*^2 \rangle = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \sigma^2(\hat{Q}), \quad \eta_*^2 = \langle \hat{D}_*^2 \rangle = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \sigma^2(\hat{P})$$

- ハイゼンベルクの不等式を満たす

$$\epsilon_* \eta_* = \sigma(\hat{Q})\sigma(\hat{P}) \geq \frac{\hbar}{2}$$

MK: arXiv:0803.4377

誤差と擾乱の再定義 — ダイアグラム



極限としてのタイプ (A), (B)

- タイプ (A): $a \to 0$, $b = 1$

$$\begin{array}{lll} \text{(New)} & \epsilon_* \to 0, & \eta_* \to \infty \\ \text{(Old)} & \epsilon = 0, & \eta = (\text{有限}) \end{array}$$

- タイプ (B): $a' = 1$, $b' \to 0$

$$\begin{array}{lll} \text{(New)} & \eta_* \to 0, & \epsilon_* \to \infty \\ \text{(Old)} & \eta = 0, & \epsilon = (\text{有限}) \end{array}$$

- タイプ (A) はスワップなので, 誤差は 0. 擾乱は?
- タイプ (B) は無測定なので, 擾乱は 0. 誤差は?

無限大の擾乱, 無限大の誤差

対立点

- タイプ (A) $\hat{p}' = -\hat{P}$: スワップ
  - (New) プローブの運動量に置き換わっているので, 擾乱は無限大
  - (Old) バラツキは有限なので, 擾乱は有限
- タイプ (B) $\hat{q}' = \hat{Q}$: 無測定
  - (New) 被測定量の情報が含まれないので, 誤差は無限大
  - (Old) バラツキは有限なので, 誤差は有限

シュレディンガー描像を用いて, 測定の相互作用による波動関数の変化を追跡すれば, (New) の方が合理的であることが分かる.

波動関数による解析

- 誤差, 擾乱演算子 (ハイゼンベルク描像) による解析
  - 簡潔だが, 形式的すぎる
  - 異なる時刻の演算子の組み合わせ： $f(\hat{A}(t), \hat{B}(t'))$
  - 実験との対応のためには, 波動関数 (シュレディンガー描像) が望ましい
- 初期状態 $|\Psi_{\text{tot}}\rangle = |\psi\rangle \otimes |\Psi\rangle = |\psi\rangle|\Psi\rangle$
- (初期) 分布関数

$$
\begin{aligned}
f(q) &:= |\langle q|\psi\rangle|^2 = |\psi(q)|^2, \\
F(Q) &:= |\langle Q|\Psi\rangle|^2 = |\Psi(Q)|^2, \\
g(p) &:= |\langle p|\psi\rangle|^2 = |\phi(p)|^2, \\
G(-P) &:= |\langle P|\Psi\rangle|^2 = |\Phi(P)|^2
\end{aligned}
$$

- 誤差, 擾乱をこれらの**分布関数の変化**として捉える.

波動関数による解析 (2)

- 相互作用後の状態

$$|\Psi'_{\mathrm{tot}}\rangle = \hat{U}[|\psi\rangle \otimes |\Psi\rangle]$$

- 相互作用後の分布関数 (理想測定)

$$\begin{aligned} F'(Q) &= \int_{-\infty}^{\infty} |\langle q|\langle Q|\Psi'_{\mathrm{tot}}\rangle|^2 \mathrm{d}q = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(q)\Psi(Q-q)|^2 \mathrm{d}q \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(q)F(Q-q)\mathrm{d}q = (f * F)(Q) \\ g'(p) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(p+P)G(-P)\mathrm{d}P = (g * G)(p) \end{aligned}$$

- 畳込み積分

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\mathrm{d}y$$

波動関数による解析 (3)

- 畳込積と分布の幅: $\sigma^2(f * g) = \sigma^2(f) + \sigma^2(g)$.
- 分布の変化

$$\sigma^2(F') = \sigma^2(f) + \sigma^2(F), \quad \sigma^2(g') = \sigma^2(g) + \sigma^2(G)$$

- 不確定積

$$\begin{aligned}\epsilon^2\eta^2 &= \left[\sigma^2(F') - \sigma^2(f)\right]\left[\sigma^2(g') - \sigma^2(g)\right] = \sigma^2(F)\sigma^2(G) \\ &\geq \frac{\hbar^2}{4}\end{aligned}$$

波動関数による解析 (4)

- 相互作用後の分布関数 (一般測定, $\hat{U}(a,b,c,d)$)

$$
\begin{aligned}
F'(Q) &= \frac{1}{\Delta}\int_{-\infty}^{\infty} f(-c'Q + a'q)F(d'Q - b'q)\mathrm{d}q \\
&= (f_{1/b'} * F_{1/a'})_{1/\Delta}(Q) \\
g'(p) &= \Delta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} g(dp + bP)G(-cp - aP)\mathrm{d}P \\
&= (g_{1/a} * G_{1/b})_{\Delta}(p)
\end{aligned}
$$

- スケールされた関数 $f_k(x) := kf(kx)$ $(k > 0)$.

$$
\int_{-\infty}^{\infty} f_k(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x, \quad \sigma(f_k) = \frac{1}{k}\sigma(f)
$$

- タイプ (A), (B) の場合は畳込の形にならない.
(極限 a, $b \to 0$ として考える)

波動関数による解析 (5)

- 分布の変化

$$\sigma^2(F') = b^2\left(\sigma^2(f) + \frac{a^2}{b^2}\sigma^2(F)\right),$$
$$\sigma^2(g') = a'^2\left(\sigma^2(g) + \frac{b^2}{a^2}\sigma^2(G)\right)$$

- 誤差と擾乱

$$\epsilon_*^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \sigma^2(F), \quad \eta_*^2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 \sigma^2(G),$$

- 不確定積

$$\epsilon_*^2\eta_*^2 = \sigma^2(F)\sigma^2(G) \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

無限小の誤差, 無限大の擾乱スワップ $(a \to 0,\, b = 1)$

- 任意の面積 1 の関数 $f(x)$ に対して

$$f_{1/a}(x) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right) \to \delta(x), \quad (a \to 0)$$

— 関数列の極限としてのデルタ関数

- $F(Q)$ がデルタ関数化 $\to$ 誤差なしに

$$\begin{aligned} F'(Q) &= (f_\Delta * F_{\Delta/a})_{1/\Delta}(Q) = (f * F_{1/a})(Q) \\ &\to (f * \delta)(Q) = f(Q) \quad (a \to 0) \end{aligned}$$

- $g(p)$ がデルタ関数化 $\to$ 擾乱が相対的に無限大に

$$\begin{aligned} g'(p) &= (g_{1/a} * G)_\Delta(p) \\ &\to (\delta * G)_\Delta(p) = G_\Delta(p) \quad (a \to 0) \end{aligned}$$

- もうひとつの解釈
  $G(P)$ が幅無限大の関数に $\to$ 擾乱が無限大に

$$g'(p) = (g * G_a)_{1/a'}(p) \to G_\Delta(p) \quad (a \to 0)$$

結論

- 測定の不確定性の議論には間接測定モデルが有効
- 一般化測定については, 誤差演算子, 擾乱演算子を定義しなおすことが必要
  — ハイゼンベルクの不等式 (URm) は破れていない
  — 小澤不等式に有用性を見出すことはむずかしい
- 分布関数を用いた解析により,

$$\{\,\text{無限大}, \text{無限小}\,\}\,\text{の}\,\{\,\text{誤差}, \text{擾乱}\,\}$$

  の意味が明確になる. ハイゼンベルク描像では見づらい.
- 残された問題
  - より一般的な相互作用への拡張
    — 非線形関係あるいは最小限の条件
  - 離散的測定モデルへの拡張