2015 年 1 月 11-12 日
第 4 回 QUATUO 研究会

電磁気の幾何学と単位系

谷村 省吾

名古屋大学 大学院情報科学研究科 複雑系科学専攻

e-mail: tanimura[AT]is.nagoya-u.ac.jp

物理学，とくに電磁気学で扱う種々の物理量を数学的・幾何学的に記述する記法を提案する．とくに空間反転（パリティ変換）に関する諸量の変換性を明確に扱える概念として捩テンソルを導入する．また，点電荷や電気双極子のような，特異性を持った物理量の分布を適切に記述する概念としてカレントを紹介する．

このノートは，あちこちで書いたノートや原稿の寄せ集めです．整理ができておりませんが，ご容赦ください．

1　スターンバーグの量概念

量とは何かという議論は長年の課題である．物理学の古典力学・熱力学・流体力学・電磁気学・統計力学・量子力学・相対論・場の理論といった各分野でも微妙な量概念を使い分けていると思われる．量概念を規定するために，加法と倍増という演算に注目するとか，大小の順序関係に注目するとか，和差積の代数構造に注目するとか，スケール変換に対する応答性に注目するとか，いろいろな観点があるが，和（加法）と実数スカラー倍（倍増）という操作で閉じている集合であるベクトル空間は，量概念の典型的モデルである．ベクトル空間に基づいて種々の量概念を整理することは，いまでも有用だと思われるので，この論点を紹介しよう．

1.1　ベクトル空間の枠とその変換

V を $\mathbb{R}$ 上の n 次元ベクトル空間とする．順序付けられた基底ベクトル $u = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)$ を V の**枠** (frame) と呼ぶ．一つの枠は線形同形写像

$$u : \mathbb{R}^n \to V, \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \mapsto (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n) \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = x^1 \boldsymbol{u}_1 + \cdots + x^n \boldsymbol{u}_n \tag{1.1}$$

と同等である．V の枠全体の集合を $\mathscr{F}(V)$ と書く．

係数 $x^1, \cdots, x^n$ は無次元数であり，基底ベクトル $\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n \in V$ やベクトル $\boldsymbol{v} \in V$ は物理的次元を持った量と解釈される．写像 $u : \mathbb{R}^n \to V$ は係数からベクトルを決める写像であり，その逆写像 $u^{-1} : V \to \mathbb{R}^n$ は，ある基準量（単位量）に比してベクトルの成分を測る写像だと言える．

一般線形変換群 (general linear transformation group)

$$
\begin{aligned}
GL(n,\mathbb{R}) &= \mathbb{R}^{\times} \times SL(n;\mathbb{R}) \\
&= \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{R}_{+} \times SL(n;\mathbb{R})
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

ここで

$$GL(n,\mathbb{R}) = \{\, g \text{ は } n \text{ 次実正方行列} \mid \det\, g \neq 0 \,\} \tag{1.3}$$

$$SL(n,\mathbb{R}) = \{\, g \text{ は } n \text{ 次実正方行列} \mid \det\, g = 1 \,\} \tag{1.4}$$

$$\mathbb{R}^{\times} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0 \,\} \tag{1.5}$$

$$\mathbb{R}^{+} = \{\, x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \,\} \tag{1.6}$$

$$\mathbb{Z}_2 = \{\, 1,\, -1 \,\} \tag{1.7}$$

は乗法群.

$GL(n;\mathbb{R})$ の元 g は線形同形写像 $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ なので，枠 $u : \mathbb{R}^n \to V$ との合成写像として $u \circ g : \mathbb{R}^n \to V$ や $u \circ g^{-1} : \mathbb{R}^n \to V$ が定義され，これらも枠になる．こうして，$\mathscr{F}(V)$ は $GL(n;\mathbb{R})$ が右から作用する空間になり，この作用は**単純推移的** (simply transitive) である．

1.2 同伴する量

群 $GL(n,\mathbb{R})$ の表現とは準同形写像

$$\rho : GL(n,\mathbb{R}) \to GL(r,\mathbb{R}) \tag{1.8}$$

のことに他ならない．直積集合 $\mathscr{F}(V) \times \mathbb{R}^r$ において，関係 $\sim$ を

$$(u, \boldsymbol{q}) \sim (u', \boldsymbol{q}') \iff \exists g \in G,\ u' = ug^{-1},\ \boldsymbol{q}' = \rho(g)\boldsymbol{q} \tag{1.9}$$

と定める．この関係 $\sim$ は同値関係になり，$(u, \boldsymbol{q})$ の同値類を $[u, \boldsymbol{q}]$ と書く．また，このような同値類全体の集合を

$$Q_\rho = \mathscr{F}(V) \times_\rho \mathbb{R}^r = \{\, [u, \boldsymbol{q}] \mid u \in \mathscr{F}(V), \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^r \,\} \tag{1.10}$$

を ρ 型の同伴ベクトル空間という.

例：双対ベクトル空間（反傾表現），(p, q) 型テンソル空間，捩テンソル空間，密度量

2 向きと量の理論

2.1 ベクトル空間とテンソル積

記法だけを書き連ねます．意味や用法は講演で説明します．きちんとしたノートを準備する時間がなくて申し訳ありません．まず,

$$V \tag{2.1}$$

実数体 $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間．有限次元とする．$\dim V = n$.

$$\mathcal{L}(V_1, V_2, \cdots, V_k; W) := \{ A : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_k \to W,\ \text{多重線形} \} \tag{2.2}$$

ベクトル空間 $V_1, V_2, \cdots, V_k$ から W への多重線形写像全体の集合．これもまた線形空間であり，

$$\dim \mathcal{L}(V_1, V_2, \cdots, V_k; W) = \dim V_1 \cdot \dim V_2 \cdots \dim V_k \cdot \dim W \tag{2.3}$$

が成り立つ．双対空間 (dual space) は

$$V^* := \mathcal{L}(V; \mathbb{R}) \tag{2.4}$$

V^* の元は 1-form, linear functional, covector などと呼ばれる．とくに，$\mathbb{R}^* \cong \mathbb{R}$. また，$U$ が 1 次元ベクトル空間ならば標準的な同形 $\mathcal{L}(U; U) \cong \mathbb{R}$ が成り立つ.

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}; V) \cong V \tag{2.5}$$

$$V^{**} = \mathcal{L}(V^*; \mathbb{R}) \cong V \qquad \text{（二重双対, bidual）} \tag{2.6}$$

$$\mathcal{L}(V, W) \cong \mathcal{L}(W^*; V^*) \qquad \text{(引き戻し, pullback, 双対作用素，反変関手)} \tag{2.7}$$

テンソル積の定義：

$$V_1^* \otimes V_2^* := \mathcal{L}(V_1, V_2; \mathbb{R}) \tag{2.8}$$

$$V_1 \otimes V_2 := \mathcal{L}(V_1^*, V_2^*; \mathbb{R}) \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^p_q(V) &= V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q} \\ &= \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{p} \otimes \underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{q} := \mathcal{L}(\underbrace{V^*, \cdots, V^*}_{p}, \underbrace{V, \cdots, V}_{q}; \mathbb{R}) \end{aligned} \tag{2.10}$$

2.2 線形写像とテンソルの同等性

この節では，線形写像とテンソルは同等の概念であり，互いに書き換えられるものであることを示す.

その準備として，2 変数関数は「2 段階の 1 変数関数」に書き換えられるという話をしよう．集合 Y から Z への写像全体の集合を Z^Y と書くことにする．任意の集合 X, Y, Z に対して

$$f : X \times Y \to Z, \qquad (x, y) \mapsto f(x, y) \tag{2.11}$$

は 2 つの引数 x, y を入れると Z に値が決まる写像だが，変数 $x \in X$ を固定すれば，これは

$$f_x : Y \to Z, \qquad y \mapsto f_x(y) := f(x, y) \tag{2.12}$$

という 1 変数 y だけの写像とみなせる．こういうふうに，多変数のうち一部の変数を固定して，残りの（動かすことを許容された）変数のみの写像になったものを**偏写像**という（偏微分は多変数関数の一つの変数だけを動かして関数を微分することだが，偏写像を扱うときに現れる，一つの変数を除いた他の変数を固定された関数が偏写像である）．以上の構成は

$$\begin{array}{rcccccc} f_\circ : & X & \to & Z^Y & & & \\ & x & \mapsto & f_x : & Y & \to & Z \\ & & & & y & \mapsto & f_x(y) = f(x, y) \end{array} \tag{2.13}$$

という 2 段階写像の形にまとめられる．

逆に，

$$\phi_\circ : X \to Z^Y, \qquad x \mapsto \phi_x \tag{2.14}$$

という写像があれば，

$$\varPhi : X \times Y \to Z, \qquad (x, y) \mapsto \varPhi(x, y) := \phi_x(y) \tag{2.15}$$

とおくことによって 2 変数関数 $\varPhi$ が定まる．

つまり,「2 変数 x, y をいっぺんに入力する関数 $f(x, y)$」と「1 つ目の変数 x を入力すると，2 つ目の変数 y の入力待ち状態になる関数 $\phi_x(y)$」はまったく同等である．さらに,「変数 y を入力すると，変数 x の入力待ち状態になる関数 $\psi_y(x)$」とも同等である．以上の観察事実をまとめると

$$Z^{X\times Y} = \left(Z^Y\right)^X = \left(Z^X\right)^Y \tag{2.16}$$

となる．

以上の一般論を線形写像に適用すると何が言えるか．ベクトル空間 V から W への線形写像全体を

$$(V \to W) \ := \ \mathcal{L}(V; W) \tag{2.17}$$

と書くことにする．また，ベクトル空間の直積集合 $V_1 \times \cdots \times V_r$ からベクトル空間 W への多重線形写像全体の集合を

$$(V_1 \times \cdots \times V_r \to W) \ := \ \mathcal{L}(V_1, \cdots, V_r; W) \tag{2.18}$$

と書くことにする．(2.4)-(2.6) の再録だが，意味を考えながら見てほしい：

$$V \ = \ (\mathbb{R} \to V), \tag{2.19}$$

$$V^* \ = \ (V \to \mathbb{R}), \tag{2.20}$$

$$V^{**} \ = \ (V^* \to \mathbb{R}) \ = \ V. \tag{2.21}$$

多重線形写像に対するテンソル積空間の普遍性（圏論を参照）は

$$(V_1 \times V_2 \to W) \ = \ (V_1 \otimes V_2 \to W), \tag{2.22}$$

$$(V_1 \times \cdots \times V_r \to W) \ = \ (V_1 \otimes \cdots \otimes V_r \to W) \tag{2.23}$$

と書かれる．$V_1 \otimes V_2$ はベクトル空間だが，$V_1 \times V_2$ はベクトル空間ではないことに注意してほしい．また，テンソル積は線形関数の積として捉えられることを意味する (2.8) は

$$V_1^* \otimes V_2^* \ = \ (V_1 \times V_2 \to \mathbb{R}), \tag{2.24}$$

$$V_1 \otimes V_2 \ = \ V_1^{**} \otimes V_2^{**} \ = \ (V_1^* \times V_2^* \to \mathbb{R}), \tag{2.25}$$

$$V_1 \otimes \cdots \otimes V_r \ = \ (V_1^* \times \cdots \times V_r^* \to \mathbb{R}) \tag{2.26}$$

と書かれる.「2 変数関数は，2 段階の 1 変数関数と等価である」という原理から

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(V_1, V_2; \mathbb{R}) \ &= \ (V_1 \times V_2 \to \mathbb{R}) \\
&= \ (V_1 \to (V_2 \to \mathbb{R})) \\
&= \ \mathcal{L}(V_1; \mathcal{L}(V_2; \mathbb{R}))
\end{aligned} \tag{2.27}$$

という線形同形関係が導かれる．2 変数の線形関数 $A(\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2)$ は，変数 $\boldsymbol{v}_1$ に関して線形であり，$\boldsymbol{v}_1$ を固定すれば残りの変数 $\boldsymbol{v}_2$ に関する線形関数になることから，1 行目から 2 行目への等号が正当化される．

以上を踏まえて線形写像の空間 $\mathcal{L}(V;W)$ が何と同形になるか追跡してみると，

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(V;W) &= (V \to W) \\
&= (V \to (W^* \to \mathbb{R})) \\
&= (V \times W^* \to \mathbb{R}) \\
&= V^* \otimes W^{**} \\
&= V^* \otimes W
\end{aligned} \tag{2.28}$$

となる．1 行目から 2 行目に進むとき，再双対原理 $W = W^{**} = (W^* \to \mathbb{R})$ を使った．2 行目から 3 行目への式変形は，2 段階関数の 2 変数関数化である．3 行目から 4 行目へのイコールは，テンソル積の定義 (2.24) そのものである．(2.28) より，線形写像 $A : V \to W$ はテンソル $V^* \otimes W$ の元と同一視される．

その他，有用と思われる関係式を導いておく：

$$\begin{aligned}
(V_1 \otimes V_2)^* &= (V_1 \otimes V_2 \to \mathbb{R}) \\
&= (V_1 \times V_2 \to \mathbb{R}) \\
&= (V_1 \to (V_2 \to \mathbb{R})) \\
&= (V_1 \to V_2^*) \\
&= V_1^* \otimes V_2^*.
\end{aligned} \tag{2.29}$$

最終行に移行するとき，線形写像とテンソルの等価性 (2.28) を用いた．また，(2.28) の続きであるが，

$$\begin{aligned}
& (V \to W) \\
= \;& (V \to (W^* \to \mathbb{R})) = (V \times W^* \to \mathbb{R}) = (V \otimes W^* \to \mathbb{R}) \\
= \;& (W^* \times V \to \mathbb{R}) = (W^* \to (V \to \mathbb{R})) = (W^* \to V^*) \\
= \;& V^* \otimes W = (\mathbb{R} \to V^* \otimes W)
\end{aligned} \tag{2.30}$$

という線形同形関係が成り立つ．また，任意のベクトル空間 Z について

$$\begin{aligned}
(V \otimes Z \to W) &= (V \times Z \to W) \\
&= (V \to (Z \to W)) \\
&= (V \to Z^* \otimes W)
\end{aligned} \tag{2.31}$$

も成り立つ．矢印 $\to$ はベクトル空間の圏における線形射を表している．(2.31) は，矢印の左側にあった Z のテンソル積を，Z^* のテンソル積に替えて矢印の右側に移し換えることができるし，その逆もできると言っている．つまり，線形射の集合 $(V \otimes Z \to W)$ と集合 $(V \to Z^* \otimes W)$ とが全単射対応している．このような $\otimes Z$ と $Z^* \otimes$ は圏論で言うところの

随伴（「ずいはん」，adjunction）の例になっている．矢印の左に現れる $\otimes Z$ は $Z^*\otimes$ の**左随伴** (left adjoint) であるといい，矢印の右に現れる $Z^*\otimes$ は $\otimes Z$ の**右随伴** (right adjoint) という．なお，圏論で随伴に要請される条件はまだあり，上に書かれた条件だけでは随伴の定義になっていない．ただ，随伴の例が登場したので，そういう用語を紹介しただけである．

また，読者が証明を考えて納得してほしいが，線形同形

$$\mathbb{R}\otimes V = V \tag{2.32}$$

が成り立つ．テンソル積の移項法則 (2.30), (2.31) は，V を V^* に，W を W^* に，Z を Z^* に変えて矢印の前後を移動させることができて，矢印の前か後が空欄になってしまうときは $\mathbb{R}$ を入れる，という規則にまとめられる．これらの規則は非常に便利で，このあと何度も使うので覚えておいてほしい．

2.3 外積代数

テンソル積空間 $V_1\otimes V_2$ や $V_1\otimes V_2\otimes V_3$ は異なったベクトル空間同士でも定められるが，とくに同じ空間に対しては外積空間 $V\wedge V=\wedge^2 V$ や $V\wedge V\wedge V=\wedge^3 V$ が定められる．例えば,（質量）×（速度）=（運動量）のように，異質な物理量の積（多重線形写像）を定めるのがテンソル積であるのに対して，長さ同士を掛け算して面積や体積を定めるのが外積である．面積や体積は多重線形性と反対称性で特徴付けられる．

反対称な線形写像を $\mathcal{A}$ で表す．

$$\wedge^p V := \mathcal{A}(\underbrace{V^*,\cdots,V^*}_{p};\mathbb{R}) \tag{2.33}$$

p 個のベクトルの反対称積．各元は p-vector と呼ばれる．

$$\wedge^q V^* := \mathcal{A}(\underbrace{V,\cdots,V}_{q};\mathbb{R}) \tag{2.34}$$

q 個の引数を持つ反対称線形汎関数全体の集合．各元は q-form, q-covector などと呼ばれる．
次元勘定：$\dim V=n$ のとき，

$$\dim(\wedge^p V) = {}_nC_p = \frac{n!}{p!\,(n-p)!} \tag{2.35}$$

とくに

$$\dim(\wedge^n V) = 1. \tag{2.36}$$

外積は双線形性・結合律・符号付き交換則を満たす．そのような代数を外積代数あるいはグラスマン代数という．これを少し変形したものがクリフォード代数．

2.4 向き付けと捩テンソル

U を 1 次元ベクトル空間とする．$\mathbb{R}_+$ を正の実数全体の集合とする.「同じ向き」という同値関係

$$\boldsymbol{u}\sim\boldsymbol{u}' \;:\Longleftrightarrow\; \exists c\in\mathbb{R}_+,\; c\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}' \tag{2.37}$$

$-\boldsymbol{u} \sim \boldsymbol{u}'$ であるとき $\boldsymbol{u}$ と $\boldsymbol{u}'$ は逆向き・反対向きという．同値類別：任意の $\boldsymbol{u} \neq 0$ に対して

$$U/\sim \;=\; U/\mathbb{R}_+ \;=\; \{\,[\boldsymbol{u}],\,[0],\,[-\boldsymbol{u}]\,\} \tag{2.38}$$

向きの集合：

$$O(U) := (U - \{0\})/\mathbb{R}_+ \;= \{\,[\boldsymbol{u}],\,[-\boldsymbol{u}]\,\} \tag{2.39}$$

$$O(V) := (\wedge^n V - \{0\})/\mathbb{R}_+ \;= \{\,[\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_n],\,[-\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_n]\,\} \tag{2.40}$$

また，自然な同一視

$$O(U)^* \cong O(U) \tag{2.41}$$

$$O(V)^* \cong O(V) \tag{2.42}$$

が成立.

捩多重線形写像 (twisted multilinear mapping) なるものを定める：

$$\mathcal{L}(O(V), V_1, V_2, \cdots, V_k; W) \tag{2.43}$$

同様に（CPT 変換などを思い出してほしい）

$$\mathcal{L}(O(W_1), O(W_2), O(W_3), V_1, V_2, \cdots, V_k; W) \tag{2.44}$$

といった写像の集合も作れる．**偶種のテンソル**（今までのテンソル）

$$\mathcal{T}^p_{(+)q}(V) = V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q} := \mathcal{L}(\underbrace{V^*, \cdots, V^*}_{p}, \underbrace{V, \cdots, V}_{q}; \mathbb{R}) \tag{2.45}$$

奇種のテンソル

$$\mathcal{T}^p_{(-)q}(V) = O(V) \otimes V^{\otimes p} \otimes (V^*)^{\otimes q} := \mathcal{L}(O(V), \underbrace{V^*, \cdots, V^*}_{p}, \underbrace{V, \cdots, V}_{q}; \mathbb{R}) \tag{2.46}$$

とくに偶種の q-covector を**常形式** (normal form)，奇種の q-covector を**捩形式** (twisted form) という.

2.5 スハウテン図法

接的向き (tangential) と法的向き（横断的，normal, tranversal）．パリティ変換性.
p-vector, p-covector, twisted p-vector, twisted p-covector の図示方法.

2.6 微分幾何学

along と across. 線の関数と面の関数，接方向の量と法線方向の量を明瞭に区別する.

twisted p-chain, twisted p-form, pairing としての積分，境界作用素と外微分作用素，ホモロジーとコホモロジー，体積要素，リーマン計量，ホッジ作用素,

電磁場と物質，マクスウェル方程式

2.7 局在量とカレント

デルタ関数の拡張・一般化概念としてカレント (current) という概念がドラーム，シュヴァルツによって定式化されている．

n 次元多様体上の偶種 p 次微分形式全体を $\Omega^p_{(+)}(M)$，奇種 p 次微分形式全体を $\Omega^p_{(-)}(M)$ とする．このとき，**偶種 $(n-p)$ 次カレント**は（一様ノルムについて連続な）線形写像

$$\alpha : \Omega^p_{(-)}(M) \to \mathbb{R} \tag{2.47}$$

であり，**奇偶種 $(n-p)$ 次カレント**は（一様ノルムについて連続な）線形写像

$$\underline{\alpha} : \Omega^p_{(+)}(M) \to \mathbb{R} \tag{2.48}$$

である．偶種 $(n-p)$ 次カレント全体を $\Gamma^p_{(+)}(M)$，奇種 p 次微分形式全体を $\Gamma^p_{(-)}(M)$.

また，カレント $\alpha \in \Gamma^{n-p}_{(+)}(M)$ の微分 $\alpha' \in \Gamma^{n-p+1}_{(+)}(M)$ を $\omega \in \Omega^{p-1}_{(-)}$ に対して

$$\alpha'(\omega) := (-1)^{n-p+1}\alpha(d\omega) \tag{2.49}$$

で定める．

テスト関数の集合と分解能（実数値）を定めると，平滑化（カレントの近似）

$$\mathcal{E} : \Gamma^{n-p}_{(\pm)}(M) \to \Omega^{n-p}_{(\pm)}(M), \tag{2.50}$$

が定まる（近似は一意的ではないので，本当はこれは写像ではない）.

点電荷・電気双極子・線電流・磁気モーメント，それらの平滑化

しかし，Abraham-Minkowski 問題は難しい．積の平均は平均の積に等しくない，物質の応答は，一般には非線形・履歴性がある．

表 1. 数量概念における向きの有無の対比

	向きなし	向きあり
数	基数	順序数
量	無向量	有向量
分布	密度	勾配
積分	Lebesgue	Riemann
微分	Radon-Nikodym	Newton-Leibniz
微分形式	捩形式	常形式
ベクトル	軸性ベクトル	極性ベクトル

表 2. (p, q, π) 型テンソルの力学・電磁気的諸物理量

偶種		奇種	
$(0,0,+)$	Q 電荷 M 質量 E エネルギー Δt 時間 ε_0 真空の誘電率 μ_0 真空の透磁率	$(0,0,-)$	$Q_A = Q_L - Q_R$ axial charge
$(1,0,+)$	$\Delta\boldsymbol{x}$ 変位 $\boldsymbol{p}$ 運動量		
$(0,3,+)$	μ 向き付き体積	$(0,3,-)$	$\underline{\mu}$ 向き無し体積 ρ 電荷密度 U エネルギー密度
		$(0,2,-)$	j 電流密度 $\boldsymbol{S}$ エネルギー流密度（ポインティング）
		$(1,2,-)$	$\boldsymbol{T}$ 運動量流密度（応力テンソル） $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ ベクトル積演算
$(0,1,+)$	$\boldsymbol{E}$ 電場	$(0,2,-)$	$\boldsymbol{D}$ 電束
$(0,2,+)$	$\boldsymbol{B}$ 磁束	$(0,1,-)$	$\boldsymbol{H}$ 磁場
$(1,0,+)$	$\boldsymbol{p}$ 電気モーメント	$(0,2,-)$	$\boldsymbol{P}$ 分極場
$(2,0,+)$	$\boldsymbol{m}$ 渦電流モーメント $\boldsymbol{A}$ 面積速度 $\boldsymbol{L}$ 角運動量	$(0,1,-)$	$\boldsymbol{M}$ 磁化場

参考文献

[1] J. A. Schouten, "Tensor analysis for physicists" (Clarendon Press, 1951), (2nd ed. Oxford, 1954).

[2] L. シュヴァルツ（小島順 訳）「解析学 5—外微分法」(東京図書, 1971).

[3] L. シュワルツ（岩村聯，石垣春夫，鈴木文夫 訳）「超函数の理論」第 3 版 (岩波書店, 1971).

[4] ド・ラーム（高橋恒郎 訳）「微分多様体—微分形式・カレント・調和形式」(東京図書, 1974).

[5] スターンバーグ（高橋恒郎 訳）「微分幾何学」(吉岡書店，1974).

[6] 小島順「量の計算と線形代数」1977 年 7 月号．小島順「量の計算を見直す」数学セミナー 1977 年 8 月号から 1978 年 1 月号にかけて連載.

[7] 今井功「電磁気学を考える」(サイエンス社, 1990)

[8] F. W. Hehl and Y. N. Obukhov, "Foundations of classical electrodynamics: charge, flux, and metric" (Birkhäuser, 2003).

[9] 北野正雄「マクスウェル方程式—電磁気学のよりよい理解のために」(サイエンス社, 2005), (新版, 2009).

[10] 谷村省吾「理工系のためのトポロジー・圏論・微分幾何 — 双対性の視点から」数理科学 SGC ライブラリ 52 (サイエンス社, 2006)．現在は電子版のみ入手可．続刊も予定.

[11] 谷村省吾「21 世紀の量子論入門」，現代数学社『理系への数学』に連載．第 17 回：計量と次元解析と超選択則（2011 年 9 月号 pp.41-47），第 18 回：有向量とパリティと超選択則（2011 年 10 月号 pp.42-48）.

[12] M. Kitano, "Mathematical structure of unit systems," J. Math. Phys. **54**, 052901 (2013).