アンサンブル量子DA変換における量子相関

齋藤 暁 <saitoh@cs.tut.ac.jp>
豊橋技術科学大学

arXiv:1409.0088v3

デジタル-アナログ変換 (DAC)

nビットデータ

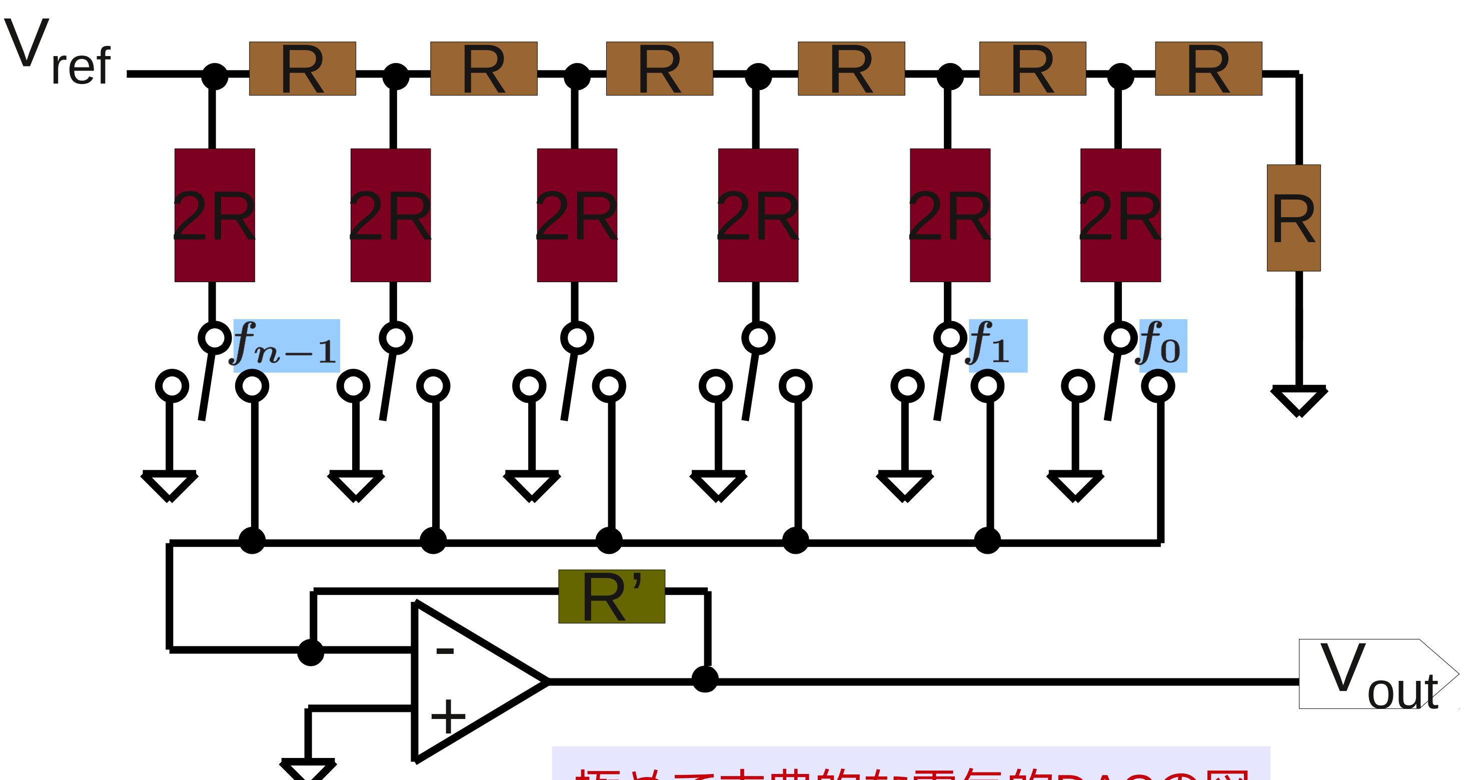
デジタルデータ $f(k) = f_{n-1}(k) \cdots f_0(k)$

$k \in \{0,1\}^m$ (k はチャネルや時間スロット)

→ アナログ振幅

$V(k) = c\, f(k)$

c : const.



極めて古典的な電気的DACの図

既存の量子 ADC/DAC (と呼ばれているもの)

連続な波動関数

n-量子ビットレジスタの状態

$$\psi(x) \quad (x \in [0, L]) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2^n}} \sum_{j=0}^{2^n-1} \psi(jL/2^n)|j\rangle$$

Jaynes-Cummingsモデルでの時間発展を利用する。

[Schmüser and Janzing, Phys Rev A 72, 042324 (2005)].

これは、しかしながら、アナログ-アナログ変換 (AAC)と言うべき。というのは、連続量と複素振幅の間の変換であるので。

我々が採用する (並列) DAC の定義

インスタンス: 整数 $m, n \geq 1$, 集合 $\{k\}$ $(k \in \{0,1\}^m)$,

写像 $f : \{0,1\}^m \to \{0,1\}^n$

制限: f はデジタルデータ $f(k)$の初期生成のみに使用

課題: すべての k に対してアナログ振幅

$V(k) = c\, f(k) \quad c : \mathrm{const.}$ を生成せよ

ユニタリーな並列DACの難しさについて

定義: 完全にユニタリーな量子DAC

$$\hat{V}:(1/\sqrt{N_k})\sum_k |f(k)\rangle|k\rangle \mapsto \sum_k \hat{f}(k)|f(k)\rangle|k\rangle$$

ここで $|\hat{f}(k)|^2 \propto f(k)+\epsilon$, $\underset{\text{(const.)}}{\epsilon < 1/2^m}$, かつ $\sum_k |\hat{f}(k)|^2 = 1$.

メモ: $\hat{V}$ が存在するのは明らか [Shende et al. IEEE Trans. CAD 25, 1000-1010 (2006)].

命題

NP $\subseteq$ BQP でない限り、$\hat{V}$ は poly(*m*,*n*)-サイズの量子回路では構成できない。

証明の概略

右の関数を採用する：$f(k) = \varphi(k)_{n-1}0_{n-2}0_{n-3}\cdots 0_0$.

CNF φ が充足可能な場合、出力状態の右側のレジスタを測定すると、充足割り当てが確率 > 1/2で観測される。

充足不可能の場合、測定結果は乱数となる。 □

非ユニタリーなアルゴリズム

poly(m,n)-コストのアルゴリズムは存在しそうにないため、
線形時間ではあるが混合状態の古典並列性を利用する、
非ユニタリーな量子アルゴリズムを開発する。

アルゴリズム中で使用する量子緩和

Depolarization写像

$$\boldsymbol{\Lambda_{\mathrm{dpl}}(p,\rho) = (1-p)\rho + p(\mathrm{Tr}\rho)I/d}$$

確率 p で(単位行列 / d)を混ぜる

Dephasing写像

$$\boldsymbol{\Lambda_{\mathrm{ph}}(p,\rho) = (1-p)\rho + p\left(\sum_{i=0}^{d-1} \langle i|\rho|i\rangle |i\rangle\langle i|\right)}$$

確率 p で非対角要素を消去する

サブルーチン $\mathbf{S_1}$

入力: $|\psi_{fk}\rangle = |f_{n-1}f_{n-2}\cdots f_0\rangle^{\mathrm{L}}|k\rangle^{\mathrm{R}}$

$(f_i \in \{0,1\}$ 、 $k \in \{0,1\}^m$ $)$

出力: $$\tilde{\rho}_{fk} = |f_{n-1}\rangle\langle f_{n-1}| \otimes \cdots \otimes |f_0\rangle\langle f_0| \otimes |k\rangle^{\mathrm{R}}\langle k| \otimes \left[\left(\frac{I}{2}\right)\delta(f_{n-1}) + (|0\rangle\langle 0|)\delta(f_{n-1}-1)\right] \otimes \cdots \otimes \left[\left(\frac{I}{2}\right)\delta(f_0) + (|0\rangle\langle 0|)\delta(f_0-1)\right]$$

手順:

(i) 補助量子ビットレジスタ $|0^{\mathrm{a}_{n-1}}_{n-1}\cdots 0^{\mathrm{a}_0}_0\rangle^{\mathrm{A}}$ を追加する。

(ii) 各ペア (f_i, a_i) に0-制御-Hadamardゲートを作用させる。

(iii) レジスタ R の各量子ビットに $\Lambda_{\mathrm{ph}}(p=1)$ を作用させる。

(iv) レジスタ L と A の各量子ビットに $\Lambda_{\mathrm{ph}}(p=1)$ を作用させる。

例)

実際には重ね合わせだが、そのなかの一つをとってみる。

$$|f_2 f_1 f_0\rangle = |\mathbf{101}\rangle$$

(i) $\Downarrow$

$$|\mathbf{101}\rangle^{\mathbf{L}}|*\rangle^{\mathbf{R}}|\mathbf{000}\rangle^{\mathbf{A}}$$

0-制御-Hadamardゲート

左ビットがゼロの時右ビット0を$|+\rangle$にする。

$$|+\rangle = (|\mathbf{0}\rangle + |\mathbf{1}\rangle)/\sqrt{\mathbf{2}}$$

(ii) $\Downarrow$

$$|\mathbf{101}\rangle^{\mathbf{L}}|*\rangle^{\mathbf{R}}|\mathbf{0}\rangle|+\rangle|\mathbf{0}\rangle^{\mathbf{A}}$$

(iii) & (iv) $\Downarrow$

$$(|\mathbf{1}\rangle\langle\mathbf{1}| \otimes |\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}| \otimes |\mathbf{1}\rangle\langle\mathbf{1}|)^{\mathbf{L}} \otimes (|*\rangle\langle*|)^{\mathbf{R}} \otimes (|\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}| \otimes \boldsymbol{I}/\mathbf{2} \otimes |\mathbf{0}\rangle\langle\mathbf{0}|)^{\mathbf{A}}$$

アルゴリズム

入力: 整数 $m, n \geq 1$ 及び関数 $f : \{0,1\}^m \longrightarrow \{0,1\}^n$.

出力: 多数の量子状態の古典的な混合で、各量子状態の信号強度が $V(k) \propto f(k)$ $(k \in \{0,1\}^m)$ であるようなもの.

手順:

(1) 純粋状態 $$|\psi_o\rangle = (1/\sqrt{2^m}) \sum_{k=0}^{2^m-1} |f(k)\rangle^{\mathrm{L}} |k\rangle^{\mathrm{R}}$$

もしくは混合状態 $$\rho_o = (1/2^m) \sum_{k=0}^{2^m-1} |f(k)\rangle^{\mathrm{L}} \langle f(k)| \otimes |k\rangle^{\mathrm{R}} \langle k|$$

を作成する(下のそれぞれの時間発展)。f はオラクル回路とみなして、その内部構造は考えない。

$$|0\rangle^{\otimes n} \left(\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \right)^{\otimes m} \stackrel{f}{\longmapsto} |\psi_o\rangle$$

$$(|0\rangle\langle 0|)^{\otimes n} \otimes (I/2)^{\otimes m} \stackrel{f}{\longmapsto} \rho_o$$

(2) いずれの状態であっても、サブルーチン S_1 に通す。すると、

$$|\psi_o\rangle \text{ or } \rho_o \overset{\mathrm{S}_1}{\longmapsto} \rho_1, \quad \text{(いずれであっても同じ状態に写される。)}$$

$$\rho_1 = \frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{2^m-1}\Big\{ |f_{n-1}(k)\rangle\langle f_{n-1}(k)| \otimes \cdots \otimes |f_0(k)\rangle\langle f_0(k)| \otimes |k\rangle\langle k| \otimes \left[\left(\frac{I}{2}\right)\delta(f_{n-1}(k)) + (|0\rangle\langle 0|)\delta(f_{n-1}(k)-1)\right]^{\mathrm{a}_{n-1}} \otimes \cdots \otimes \left[\left(\frac{I}{2}\right)\delta(f_0(k)) + (|0\rangle\langle 0|)\delta(f_0(k)-1)\right]^{\mathrm{a}_0}\Big\}$$

(3) Depolarization写像 $\Lambda_{\mathrm{dpl}}(p=p_i)$を各補助量子ビット a_i に変数値 $p_i = 1 - 2^{i-n+1}$ で作用させる。
また $q_i = 2^{i-n+1}$ とおく。
その結果、以下の状態となる。これを出力とする。

$$\rho_2 = \frac{1}{2^m}\sum_{k=0}^{2^m-1}\Big\{ \left[\bigotimes_{i=0}^{n-1} |f_i(k)\rangle\langle f_i(k)|\right]^{\mathrm{L}} \otimes |k\rangle^{\mathrm{R}}\langle k| \otimes \bigotimes_{i=0}^{n-1}\left[\left(\frac{I}{2}\right)\delta(f_i(k)) + p_i\left(\frac{I}{2}\right)\delta(f_i(k)-1) + q_i(|0\rangle\langle 0|)\delta(f_i(k)-1)\right]^{\mathrm{a}_i}\Big\}$$

補助ビット $\mathbf{a}_0, \cdots, \mathbf{a}_{n-1}$ についてのみ $|\hat{Z}\rangle\rangle \equiv Z/2 + I/2$ のdeviation density matrix表示を採用し、スーパーケットで書くと

$$|\hat{\rho}_2\rangle\rangle = \frac{1}{2^m} \sum_{k=0}^{2^m-1} \left\{ \left[\bigotimes_{i=0}^{n-1} |f_i(k)\rangle\rangle \right]^{\mathrm{L}} \otimes |k\rangle\rangle^{\mathrm{R}} \otimes \bigotimes_{i=0}^{n-1} 2^{i-n+1} \delta(f_i(k)-1) |\hat{Z}\rangle\rangle^{\mathbf{a}_i} \right\}$$

ただし、$|\cdot\rangle\rangle \equiv |\cdot\rangle\langle\cdot|$.

各kについて、 $\langle \sum_i Z^{\mathbf{a}_i} \rangle \propto f(k) = f_0(k) \cdots f_{n-1}(k)$

よって、$|\hat{\rho}_2\rangle\rangle$はDAC出力の混合になっている。

各kについてシグナルを取り出すには、

(k)-controlled-$H^{\otimes n}$ ➡ $\langle \sum_i X^{\mathbf{a}_i} \rangle$測定 ➡ (k)-controlled-$H^{\otimes n}$

例)　重ね合わせのなかの一つだけとってみると、

$$|f_2 f_1 f_0\rangle = |101\rangle$$

(1)&(2)

$$(|1\rangle\langle 1| \otimes |0\rangle\langle 0| \otimes |1\rangle\langle 1|)^{\mathrm{L}} \otimes (|*\rangle\langle *|)^{\mathrm{R}} \otimes (|0\rangle\langle 0| \otimes I/2 \otimes |0\rangle\langle 0|)^{\mathrm{A}}$$

(3)

$$(\cdots)^{\mathrm{LR}} \otimes (|0\rangle\langle 0|) \otimes (I/2) \otimes [(1 - 1/2^2) I/2 + 1/2^2 |0\rangle\langle 0|]$$

測定値 $\propto (\mathrm{Tr}|0\rangle\langle 0|Z = 1 \times (1/2^0)) + (\mathrm{Tr}(I/2)Z = 0 \times (1/2^1))$

$+ (\mathrm{Tr}[(1 - 1/2^2) I/2 + 1/2^2 |0\rangle\langle 0|]Z = 1 \times (1/2^2))$

$\propto f.$

計算コスト及び必要な物理的資源

時間量: fの内部コスト：クエリーに含める
その他の各ステップ: $O(m+n)$

$\boxed{O(m+n)}$

空間量: f内部の回路幅：クエリーに含める
その他の部分での回路幅: $m+2n$

$\boxed{m+2n}$

クエリー量: $\boxed{1回}$

物理的資源:

レジスタの初期化コスト

データ圧縮して圧縮部分を捨てるアルゴリズム(例えば Schulman-Vazirani 1999) を使うと、poly(m,n) 資源でレジスタ初期化が可能である。

平均値測定のコスト

信号 $V(k) \propto f(k)/2^m$
ランダムノイズの下で L 回積算すると、
SN比は、$\propto L/2^m : \sqrt{L}$
$\mathcal{O}(2^{2m})$ 回の積算が必要。

現実的な入力サイズ： $m \lesssim (\log_2 10^{23})/2 \simeq 38$

アルゴリズム中に現れる量子相関

始めから混合状態を使う場合、エンタングルメントは存在しない。
しかし、量子ディスコードで定量化される量子相関は現れる。

サブルーチンS_1のステップ(ii)で以下の状態が現れる。

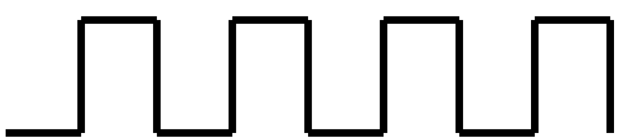
$$\tilde{\rho} = (1/2^m) \sum_{k=0}^{2^m-1} |f(k)\rangle^{\mathrm{L}}\langle f(k)| \otimes |k\rangle^{\mathrm{R}}\langle k| \otimes |a(k)\rangle^{\mathrm{A}}\langle a(k)|$$

ここで $|a(k)\rangle^{\mathrm{A}} = \bigotimes_i (|+\rangle_i \delta(f_i(k)) + |0\rangle_i \delta(f_i(k)-1))$.

簡単のため、f としてクロック関数を考える：

$f(k) = 2^{n-1}$　半数の k.

$f(k) = 0$　残り半数の k.



Aを測定側として量子ディスコードの量を計算すると、

$$\boxed{D^{\Pi^{\mathrm{A}}}(\tilde{\rho}) \approx 0.201752.}$$

なお、$D^{\Pi^{\mathrm{LR}}}(\tilde{\rho}_{\mathrm{c}}) = 0.$

$D^{\Pi^{\mathrm{A}}}(\widetilde{\rho})$ の計算のやや詳細

一般の二体系 $\mathcal{AB}$ で、$\mathcal{A}$ を測定側とした量子ディスコード：

$$D^{\Pi^{\mathcal{A}}}(\rho^{\mathcal{AB}}) = S(\rho^{\mathcal{A}}) - S(\rho^{\mathcal{AB}}) + \min_{\Pi^{\mathcal{A}}} S(\rho^{\mathcal{AB}}|\Pi^{\mathcal{A}})$$

ここで、$S(\rho^{\mathcal{AB}}|\Pi^{\mathcal{A}}) = \sum_j p_j S(\sigma_j)$

ただし $\begin{cases} p_j = \mathrm{Tr}(\Pi_j^{\mathcal{A}} \otimes I^{\mathcal{B}} \rho^{\mathcal{AB}}) \\ \sigma_j = (\Pi_j^{\mathcal{A}} \otimes I^{\mathcal{B}} \rho^{\mathcal{AB}} \Pi_j^{\mathcal{A}} \otimes I^{\mathcal{B}})/p_j \end{cases}$

$\Pi^{\mathcal{A}} = \{\Pi_j^{\mathcal{A}}\}$ は直交する射影演算子の集合

さて、今の文脈では、

$$\mathcal{A} = \mathrm{A},\ \mathcal{B} = \mathrm{LR},\ \rho^{\mathcal{AB}} = \widetilde{\rho} \qquad \text{である。}$$

まず、簡単に分かるのは、

$$S(\widetilde{\rho}) = S(\widetilde{\rho}^{\mathrm{LR}}) = m.$$

また、 $$S(\widetilde{\rho}^{A}) = S\left(\frac{|+\rangle\langle+|+|0\rangle\langle0|}{2} \otimes |+\cdots+\rangle\langle+\cdots+|\right)$$
$$= -\sum_{\pm} \lambda_{\pm} \log_2 \lambda_{\pm} \approx 0.600876 \quad (\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{4}).$$

これらから、計算すべき量子ディスコードは、

$$D^{\Pi^{A}}(\widetilde{\rho}) \approx 0.600876 - m + \min_{\Pi^{A}} S(\widetilde{\rho}|\Pi^{A}).$$

arXiv:1409.0088v3 のSupplementary Materialから、

$$\min_{\Pi^{A}} S(\widetilde{\rho}|\Pi^{A}) = m + \min_{\theta}\Bigg[-H\left(\frac{(\cos\theta+\sin\theta)^2}{4} + \frac{\cos^2\theta}{2}\right) + \frac{1}{2}H\left(\frac{(\cos\theta+\sin\theta)^2}{2}\right) + \frac{1}{2}H\left(\cos^2\theta\right)\Bigg]$$
$$\approx m - 0.399124.$$

ただし $H(x) = -x\log_2 x - (1-x)\log_2(1-x)$.

以上から、 $D^{\Pi^{A}}(\widetilde{\rho}) \approx 0.201752.$

まとめ

- $\mathtt{NP} \subseteq \mathtt{BQP}$ でない限り、ユニタリーな量子DACを行う量子回路は、多項式回路サイズでは構成できない。

- 緩和を利用するアンサンブル量子DACを提案した。

- 線形時間、領域で動作するが、物理資源は指数的に大きなものを使用する。分子アンサンブル系では、$\boldsymbol{m \lesssim 38}$ までならば、実装不可能ではない。

- 混合状態から始めると、エンタングルメントはないが、量子ディスコードはサブルーチン $\mathbf{S_1}$ で現れる。