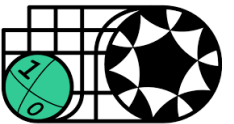


Wigner-Araki-Yanase定理の発展とその周辺: 対称性がダイナミクスにもたらす普遍的制限

田島裕康

電気通信大学・JSTさきがけ



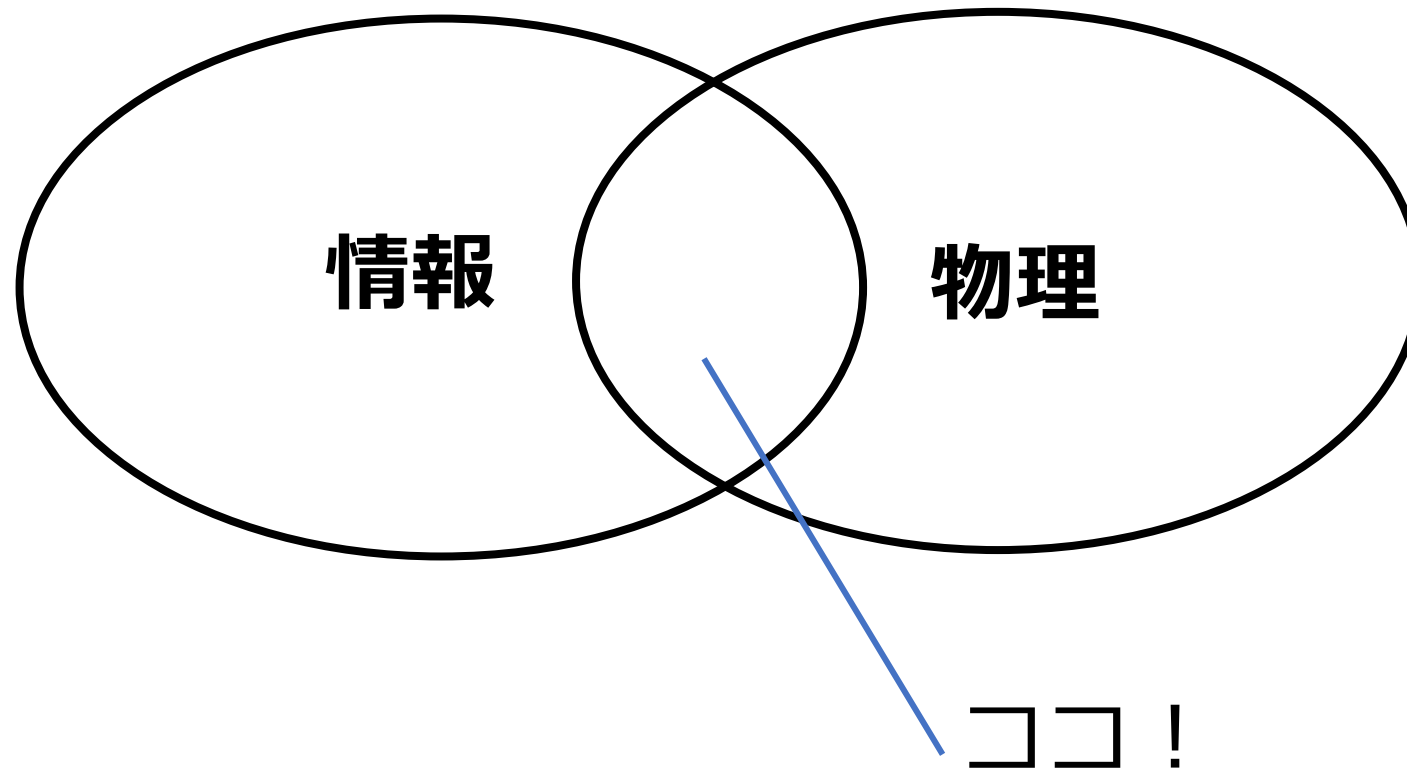
簡単な自己紹介

名前：田島裕康

所属：電通大、JSTさきがけ

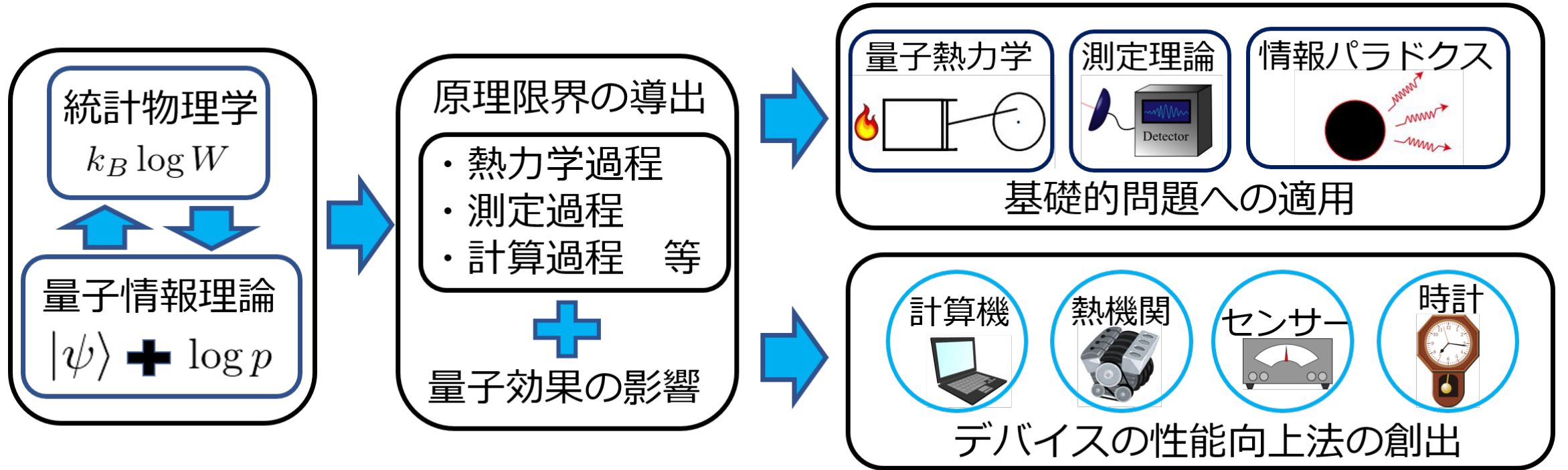
研究領域：量子情報（特に量子基礎）と非平衡物理学の境界領域

情報から物理を理解する



簡単な自己紹介

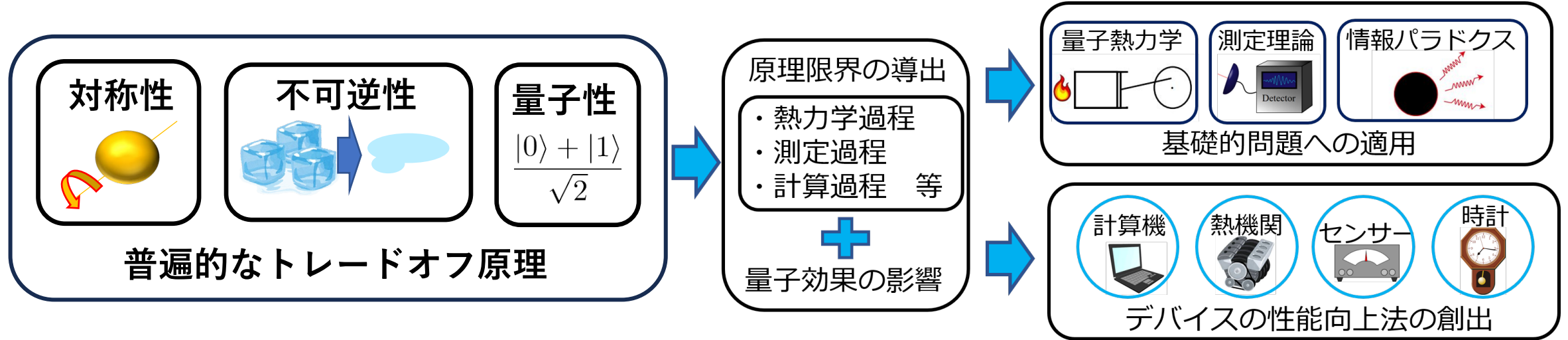
より具体的には . . .



を行っている

今行っている研究

- 「対称性」「不可逆性」「量子性」を軸にした解析を行っている



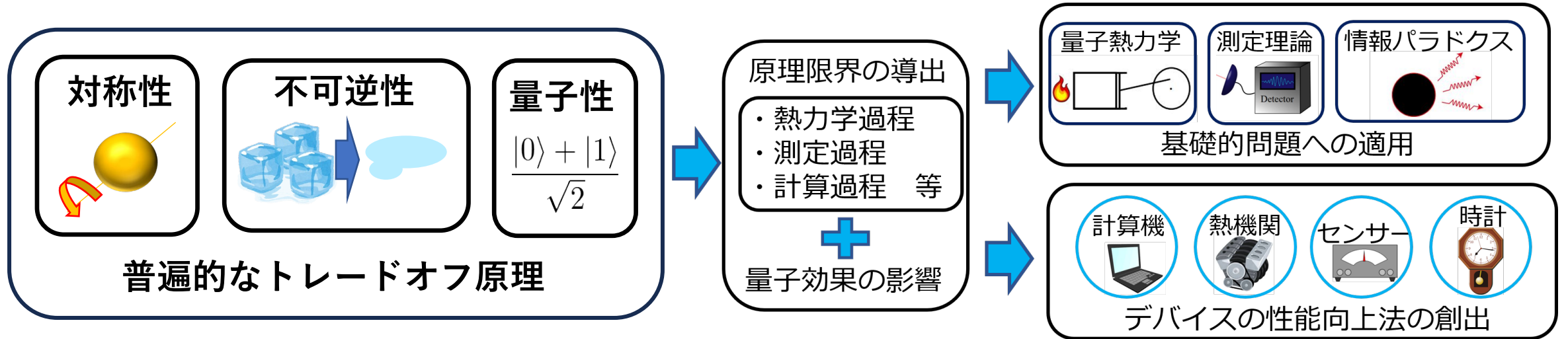
- まだ発展途上だが、だいぶ一般的な理論が出来てきた

適用対象：

量子誤り訂正符号、量子測定、量子計算（ユニタリーゲート）実装、熱力学的過程、ブラックホール蒸発、OTOC、不確定性原理（の誤差・擾乱）etc…

- Wigner-Araki-Yanase(WAY)定理と、非対称性のリソース理論と強く関連する

今日の目標



今日の目標：一連の結果を背景を含めて説明して、議論を深めたい
+ 「WAY定理は役に立つのか？」という疑問に答えたい

答え：WAY定理は直接は役に立たないが、WAY系定理は役に立つ！

• WAY定理の直接的な発展

ユニタリーゲートについてのWAY

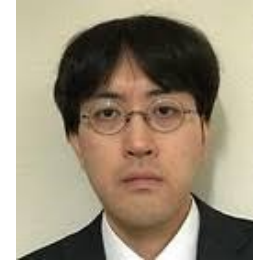
H. Tajima, N. Shiraishi and K. Saito, Phys. Rev. Lett. **121**, 110403 (2018)
Phys. Rev. Research. **2**, 043374 (2020).

測定についてのWAY

H. Tajima and H. Nagaoka, arXiv:1909.02904 (2019)

Y. Kuramochi and H. Tajima, Phys. Rev. Lett. **131**, 210201 (2023): Featured in Physics

} QIP2020
Talk



• 対称性・不可逆性・量子性のトレードオフ構造

Master eq.でのトレードオフ構造

★ H. Tajima and K. Funo, Phys. Rev. Lett. **127**, 190604 (2021)

Editor's suggestion + Featured in Physics

一般のCPTP-mapでのトレードオフ構造

★ H. Tajima and K. Saito arXiv:2103.01876 (2021)

★ H. Tajima, R. Takagi and Y. Kuramochi arXiv:2206.11086 (2022)

} QIP2023 talk



任意の誤差・擾乱・OTOCへの応用

H. Emori and H. Tajima, arXiv:2309.14172 (2023)



• 非対称性のリソース理論の基礎の拡充

U(1)対称性におけるnon-iidの理論(2本)

K. Yamaguchi and H. Tajima, Phys. Rev. Lett. **131**, 200203 (2023)

Quantum **7**, 1012 (2023).

より一般の対称性の理論

D. Kudo and H. Tajima, Phys. Rev. A **107**, 062418 (2023). T. Shitara* and H. Tajima*, arXiv:2312.15758 (2023).



背景：Wigner-Araki-Yanase定理の成立と
2000年代の発展

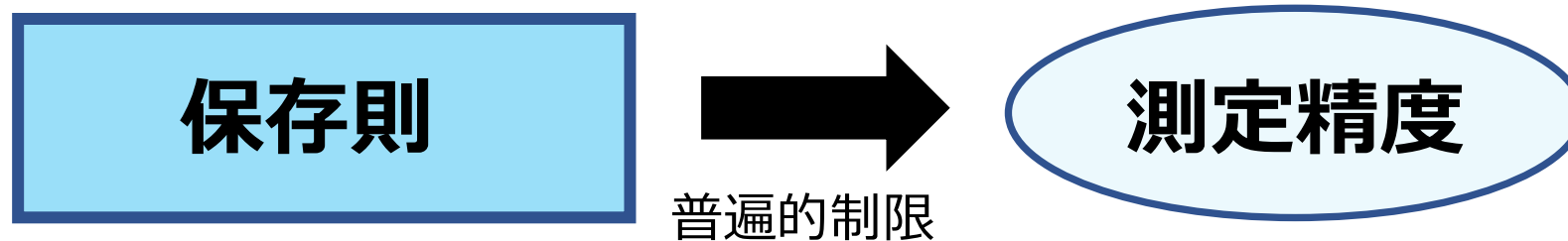
背景：量子情報処理と対称性

対称性が量子情報処理にどのような影響を及ぼすかは、非常に長いこと研究されてきた

歴史的に見て、こうした研究の最も先駆的なものは、1952～1960に成立した
Wigner-Araki-Yanase定理

量子情報理論そのものよりも古い！

定理内容：



対称性と量子情報処理の関係を示す様々な定理の元型

ここでまず、以降の数スライドで簡単にWigner-Araki-Yanase定理から始まる一連の研究を概観する。

背景：Wignerの洞察

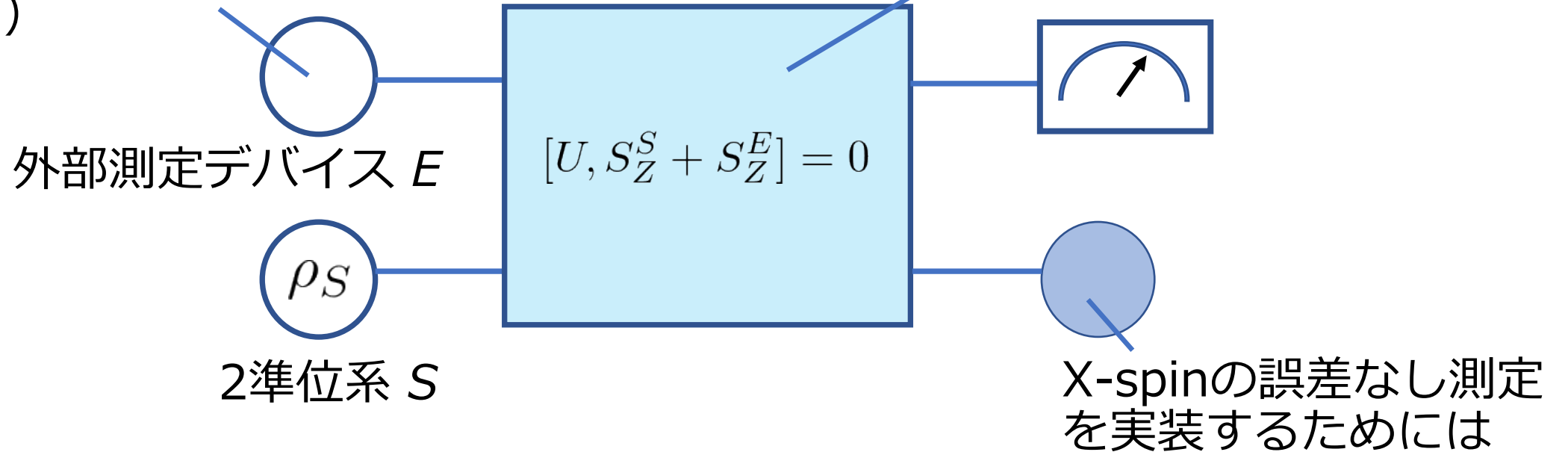


E. P. Wigner, Z. Phys. **133**, 101 (1952).

E. P. Wigner (1952)

2準位スピンに対する間接測定についてのno-go定理

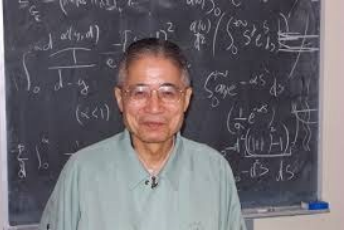
測定デバイスEが無限サイズでなくてはならない
(=不可能)



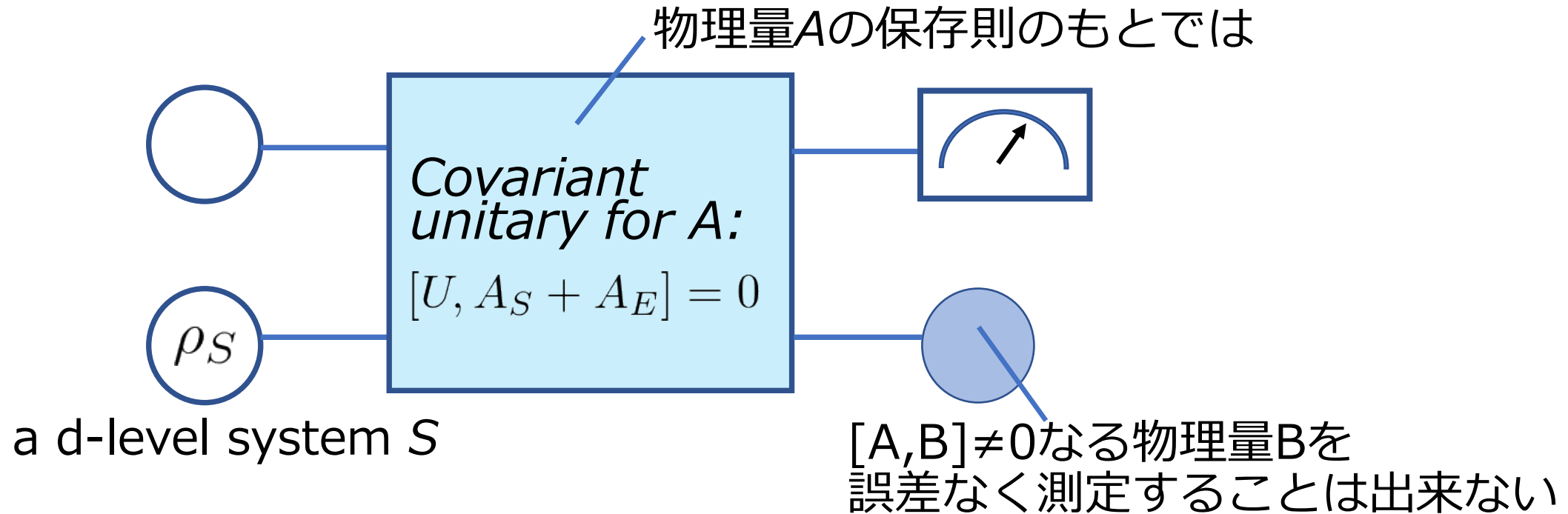
➡Z-スピンの保存則のもとでは、x-spinは誤差なく測定できない！

背景：Wigner-Araki-Yanase(WAY)定理の成立

H. Araki and M. M. Yanase, Phys. Rev. **120**, 622 (1960).



H. Araki and M. M. Yanase (1960):
Wignerの結果を一般の系・保存則に拡張



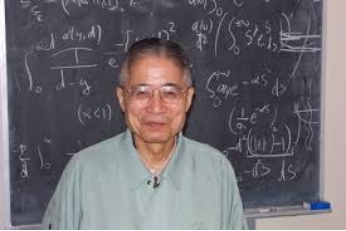
具体例：

Aがハミルトニアン、Bがそれと交換しない（=時間変化する）物理量にする

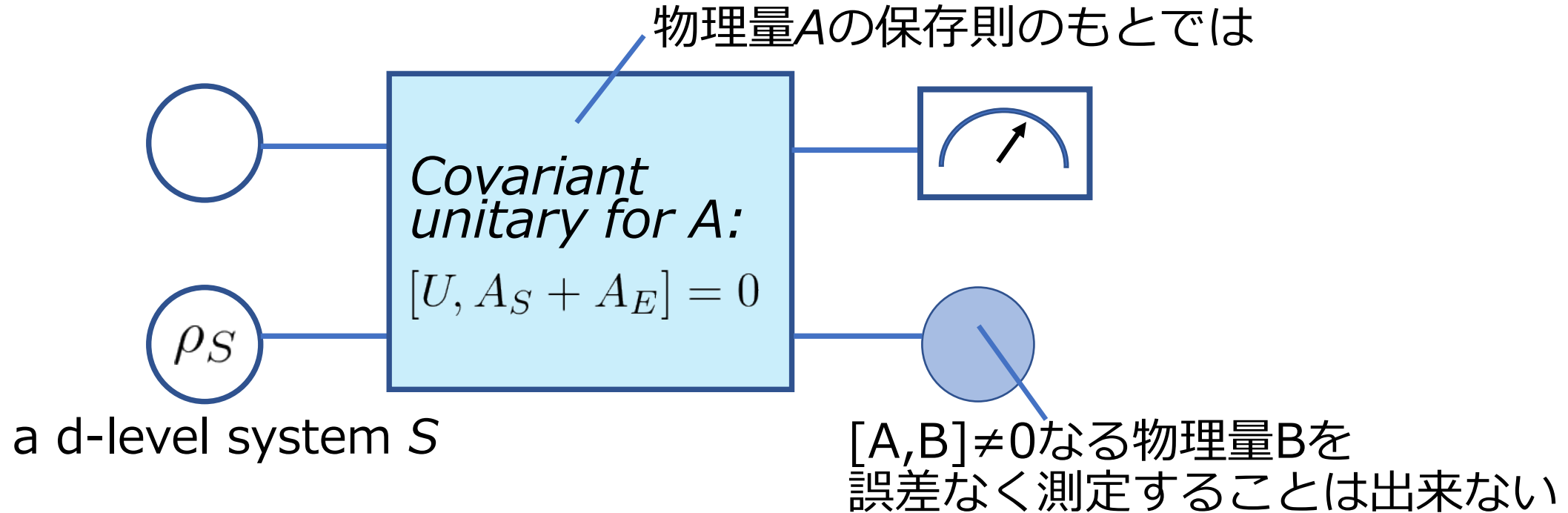
→「時間変化する物理量の瞬間の値を、誤差なく測ることは出来ない」となる

背景：Wigner-Araki-Yanase(WAY)定理の成立

H. Araki and M. M. Yanase, Phys. Rev. **120**, 622 (1960).



H. Araki and M. M. Yanase (1960):
Wignerの結果を一般の系・保存則に拡張



余談：

Wigner-Araki-Yanase定理は、証明がbounded operatorに限定されていた。
最近、それを（Yanase条件と呼ばれる条件の下で）unbounded operatorに拡張した

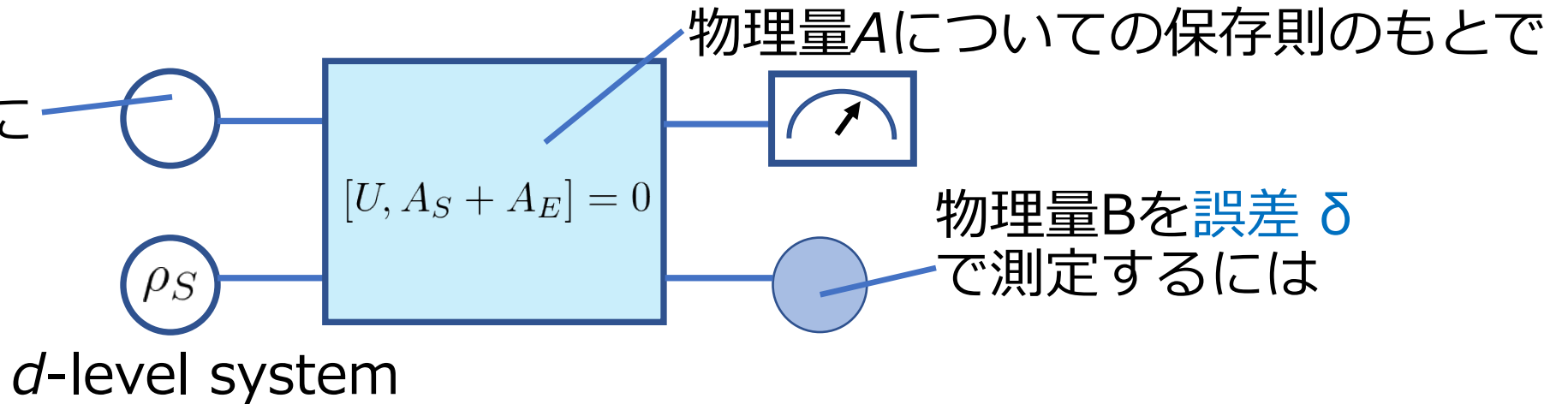
Y. Kuramochi and H. Tajima, Phys. Rev. Lett. **131**, 210201 (2023): Featured in Physics

背景：小澤による拡張

拡張1：定量的なWAY theorem

M. Ozawa, Phys. Rev. Lett. 88 050402 (2002).

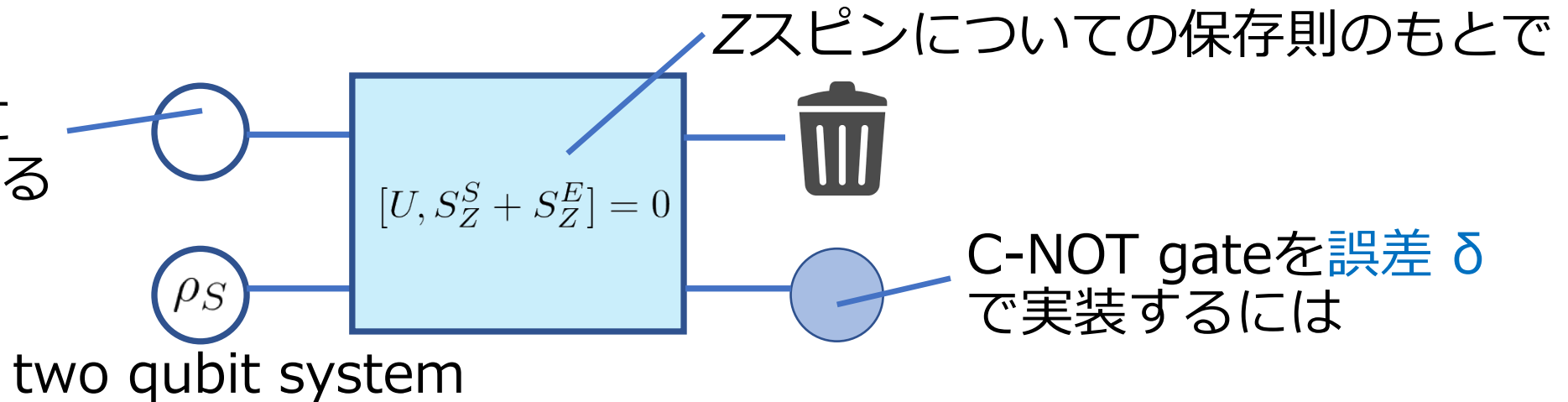
保存量 A_E の分散が δ に
反比例して必要になる



拡張2：計算（C-NOT gate）への一般化

M. Ozawa, Phys. Rev. Lett. 89 507902 (2002).

Zスピンの分散が δ に
反比例して必要になる



疑問：共通する制限？

拡張1: 定量的なWAY theorem

M. Ozawa, Phys. Rev. Lett. 88 050402 (2002).



拡張2: 計算 (C-NOT gate) への一般化

M. Ozawa, Phys. Rev. Lett. 89 507902 (2002).



自然に生じる疑問：

- より一般のユニタリーゲートでも、同様の関係が成立するのではないか？
➡NOT gate, Hadamard gate, Fredkin gateなどについて同様の関係が示されるも、一般のユニタリゲートについては未解決・・・
- 「分散」でよいのか？（熱雑音で精度向上？）

結果1: unitary WAY定理と、Error-coherence tradeoff

Unitary WAY theorem

拡張1: 定量的なWAY theorem

M. Ozawa, Phys. Rev. Lett. 88 050402 (2002).



拡張2: 計算 (任意のTugittery gate) 一般化

H. N. Shiraishi, and K. Saito, Phys. Rev. Lett. 89 507902 (2002).
Phys. Rev. Lett. 121, 110403 (2018).



自然に生じる疑問：

- より一般のユニタリーゲートでも、同様の関係が成立するのではないか？
- 「分散」でよいのか？（熱雑音で精度向上？）

Error-coherence trade-off

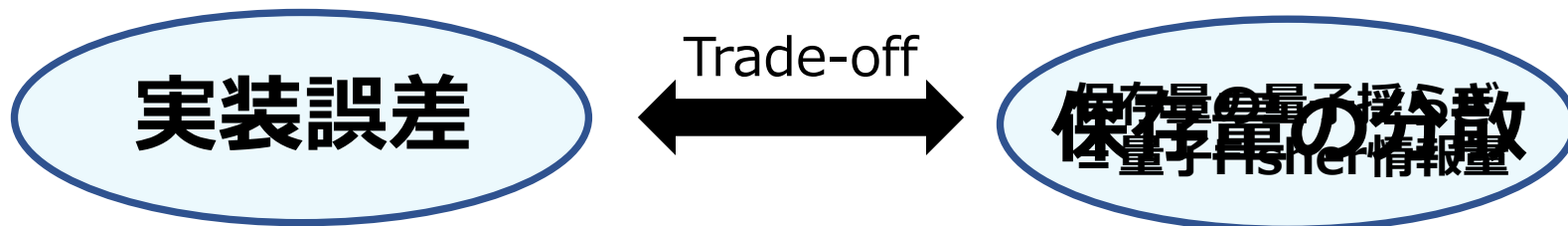
拡張1: 定量的なWAY theorem

H. Ozawa, Phys. Rev. Lett. 98, 050402 (2002).



拡張2: 計算（任意のunitary gate）への一般化

HT, N. Shiraishi, and K. Saito, Phys. Rev. Lett. 121, 110403 (2018).



自然に生じる疑問：

- より一般のユニタリーゲートでも、同様の関係が成立するのではないか？
- 「分散」でよいのか？（熱雑音で精度向上？）

Error-coherence trade-off

拡張1: 定量的なWAY theorem



拡張2: 計算（任意のunitary gate）への一般化



つまり実際にあったのは、誤差とコヒーレンス（=リソース）の反比例関係

共通するのは、「測定とユニタリー」だけだろうか？

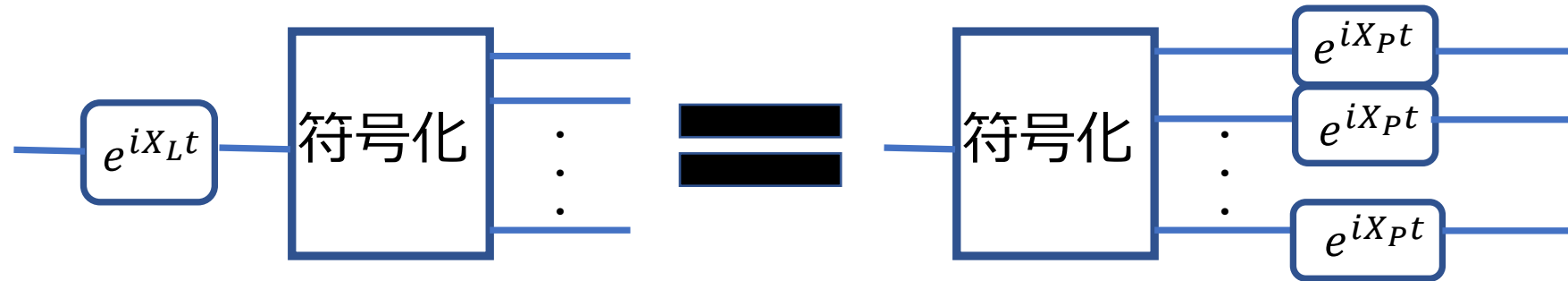
疑問：共通する制限？

実際に、測定とユニタリー以外の分野で、類似の関係が存在する

➡ Eastin-Knill定理

B. Eastin and E. Knill,
Phys. Rev. Lett. 102, 110502 (2009)

ターゲットとなるのは誤り訂正符号：



このような「covariant code」は、qubit消去エラーに対して完全な復号能力を持たない、というNo-go定理

さらに最近、「符号化qubitの数」と復号エラーが反比例の関係になることも明らかに

P. Faist, et al., Phys. Rev. X 10, 041018 (2020).

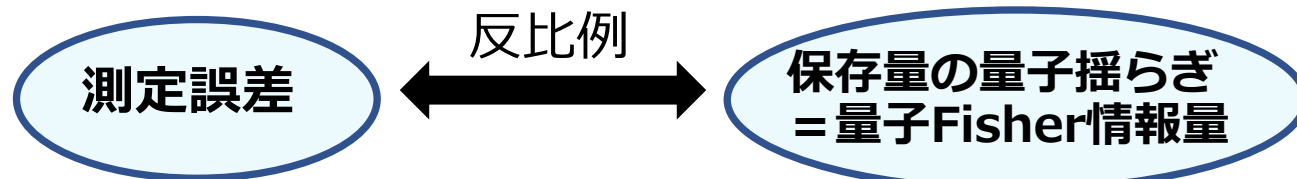
背景：共通する制限

測定、ユニタリー、誤り訂正に、極めて類似する三つの制限があることになる

測定：定量的なWAY定理

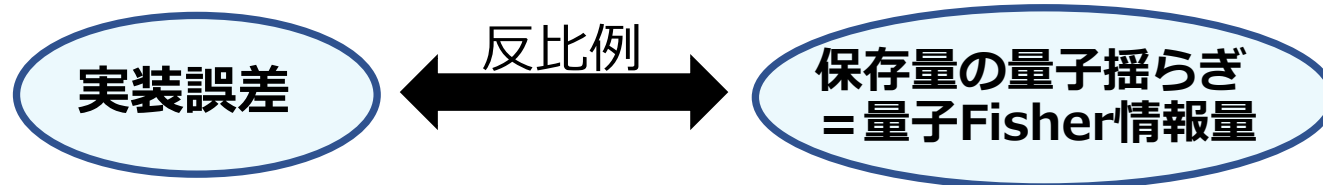
M. Ozawa, PRL 2002 (分散)

H. Tajima and H. Nagaoka arXiv 2019 (量子揺らぎ)



計算：任意のunitary gateにおけるWAY定理

H. Tajima, et. al. PRL 2018, QIP talk 2020



誤り訂正符号：定量的なEastin-Knill定理

P. Faist et al PRX 2020, QIP talk 2020



これらは、本当は一つの定理の特殊な表れなのではないか？

対称性・不可逆性・量子性の統一構造？

先ほどの3つの「WAY的」定理は、不等式の形も共通：

$$\frac{\text{係数}}{\text{リソース} + \text{定数}} \leq \text{誤差}$$

誤差 ϵ 不可逆性と考えると、非常に似た構造を持っていることが分かる

測定

測定の誤差は情報損失=不可逆性

ユニタリー

ユニタリーの誤差は不可逆性

誤り訂正

復号誤差も不可逆性

こうした背景のもと、対称性・不可逆性・量子性の間に、統一的なトレードオフ構造があるのではないかと考えた

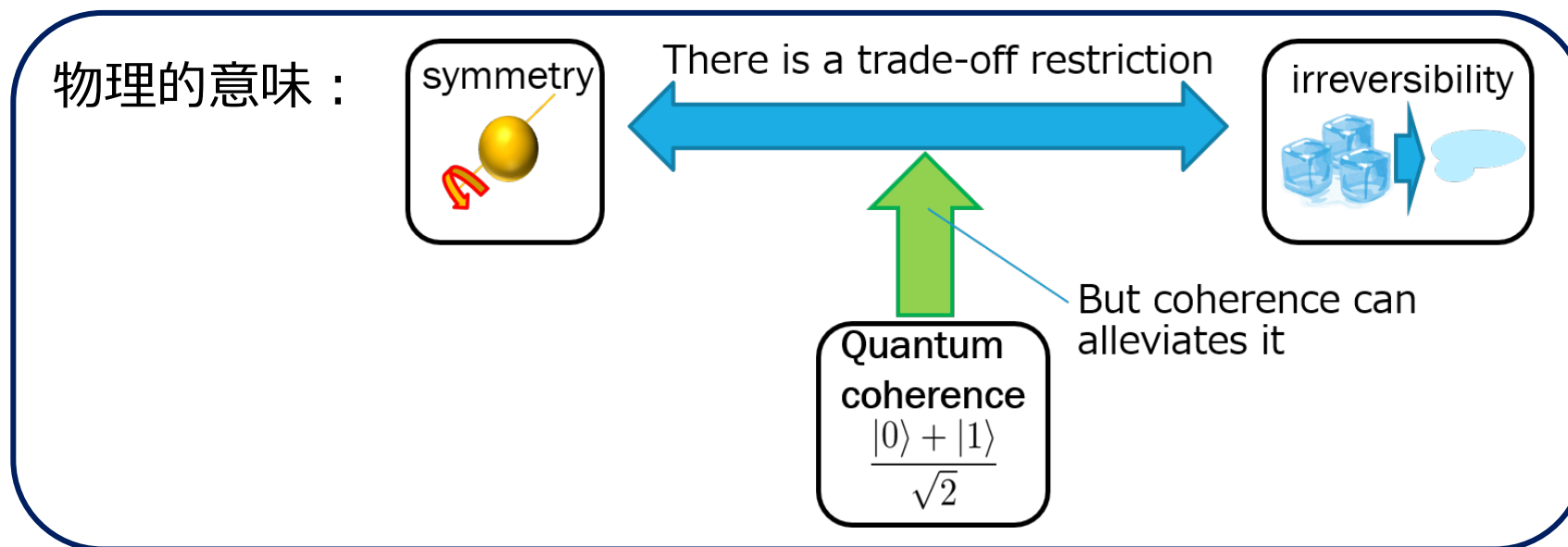
➡以下頭文字を取ってSIQと呼ぶ。

予想：対称性・不可逆性・量子性の普遍的トレードオフ

具体的な構造として、以下の形のトレードオフがあることを予想した：

研究開始当初の表現。最終的に、「局所保存量の変化」で書けることが判明

$$\frac{\text{対称性の局所的な破れの度合い}}{\text{量子コヒーレンス} + \text{定数}} \leq \text{不可逆性}$$



- ・このような「原理」が存在し、いろんなところで顔を出しているのが、WAY系定理の正体ではないか？
- ・不可逆性と対称性と量子性がかかわるのはWAYだけではないので、あらゆるダイナミクスに対して普遍的な制限が存在し、多様な応用が与えられるのではないか？

➡この予想を、定理の形で確認した！

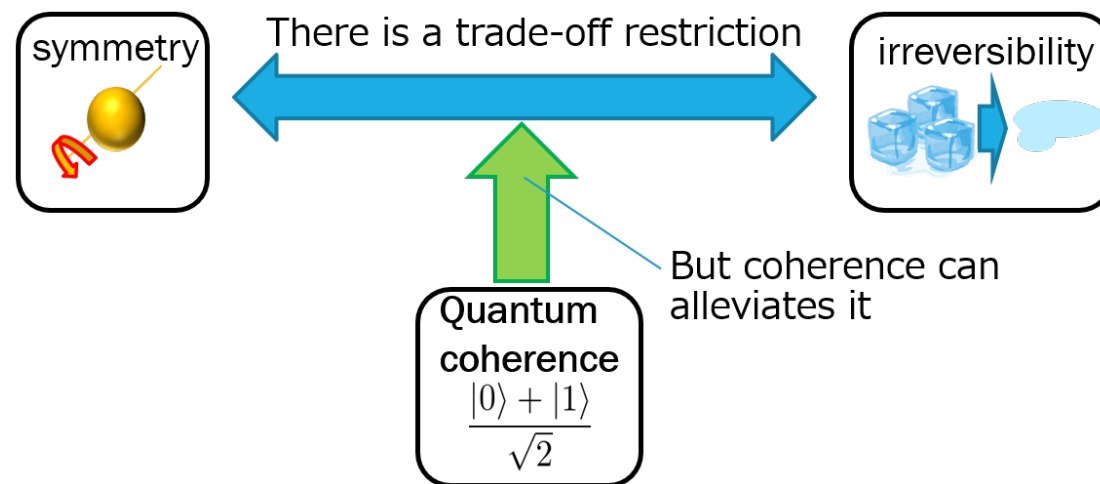
結果2：対称性・不可逆性・量子性のトレードオフ定理

結果：対称性・不可逆性・量子性の普遍的トレードオフ

実際に、二種類の状況で以下の形のSIQ不等式の成立を示した。

$$\frac{\text{局所保存量の変化}}{\text{量子コヒーレンス} + \text{定数}} \leq \text{不可逆性}$$

- ・ マスター方程式で記述できるようなダイナミクス
 - ➔ 「散逸のない熱流」の構成法と、それにともなう熱機関における古典限界を超えた性能向上法の提案
- ・ より一般的なCPTP-mapで記述できるダイナミクス
 - ➔ 誤り訂正・測定・量子ゲート実装・ブラックホール・熱力学的過程に適用可能



結果1：マスターeqに対する結果

この結果は、SIQ構造が本当にあるのかを確かめる意味で、熱力学的不可逆性に限定しての解析を行うことで得た。

ターゲットとして考えたのは、熱力学第二法則：

$$\Delta S \geq 0$$

近年、第二法則はある種のrefinementが可能であるということが理解されつつある。例えば古典master eqで記述される範囲で

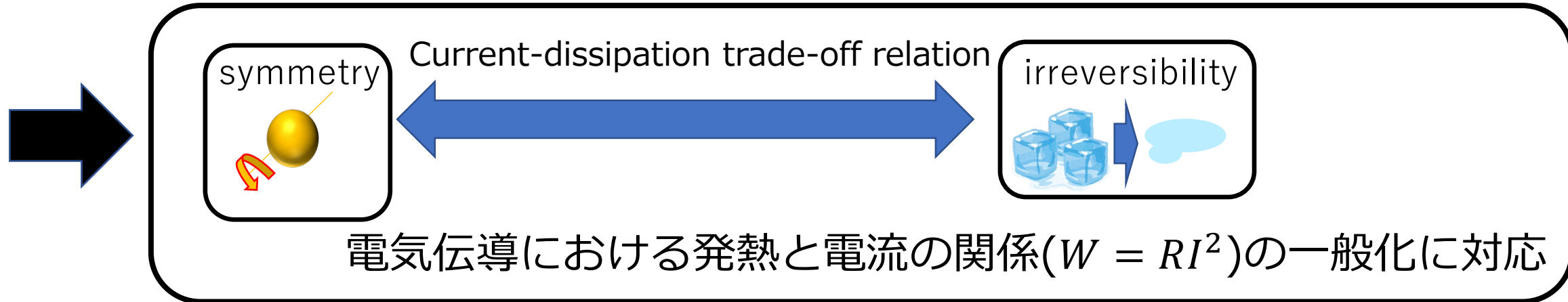
$$\dot{\sigma} \times \Theta \geq J^2$$

N. Shiraishi, K. Saito, and H. Tasaki
Phys. Rev. Lett. **117**, 190601

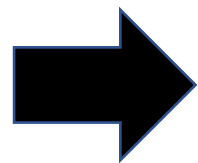
Refinementは、「保存量の流れと」「不可逆性」のトレードオフになっている。

結果1：マスター-eqに対する結果

$$\dot{\sigma} \times \Theta \geq J^2$$



もしも「SIQ構造」が本当にあるのならば、このトレードオフ関係はコヒーレンスによって和らげられるはず
PRL editor's suggestion + Featured in Physics
解説記事: 日本物理学会誌 77, 621 (2022)



定理：
Current-dissipation trade offは、
量子コヒーレンスによって実効的に無効化できる

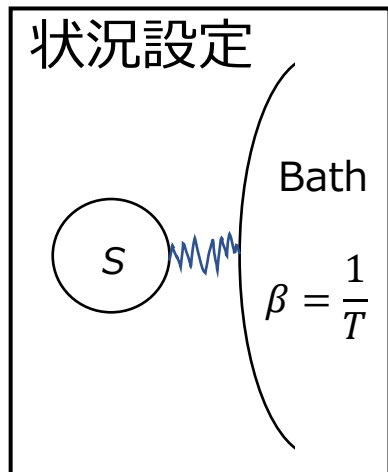
H. Tajima and K. Funo, PRL 127, 190604 (2021)

量子コヒーレンスによる、「エネルギーロスのない熱流」の実現

マスターeqに対するSIQトレードオフ

問題設定

標準的な量子マスターeqに従う系



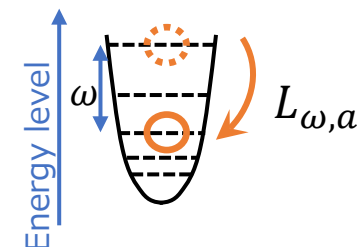
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -i[H, \rho] + \mathcal{D}[\rho].$$

$$\mathcal{D}[\rho] = \sum_{\omega, a} \gamma_a(\omega) \left(L_{\omega, a} \rho L_{\omega, a}^\dagger - \frac{1}{2} \{ L_{\omega, a}^\dagger L_{\omega, a}, \rho \} \right).$$

$$L_{\omega, a} := \sum_e \Pi_{e-\omega} L_a \Pi_e$$

Π_e は、エネルギー固有値 e の固有空間への射影.

Tajima-Funo PRL 2021



結果：

熱流 (= 局所エネルギー変化速度)

$$\frac{2J(\rho)^2}{A_{\text{qm}} + A_{\text{cl}}} \leq \dot{\sigma}(\rho)$$

系の持つコヒーレンス

非負定数

エントロピー生成率
(= 熱力学的不可逆性)

留意：散逸のない熱流

得られたSIQ不等式において、不可逆性抑制はどこまで可能か、を考える

$$\frac{2J(\rho)^2}{A_{qm} + A_{cl}} \leq \dot{\sigma}(\rho)$$

もしも A_{qm} が $O(N^2)$ の量なら、を考える

N は例えば縮退の数や、粒子の数

すると、 $J = O(N)$ 、 $\dot{\sigma} = O(1)$ が式的に可能であることが分かる。

➡コヒーレンスが十分にあり、 A_{qm} が $O(N^2)$ になるときには
「マクロな大きさの熱が流れるのに、エントロピー増大はマイクロオーダーのまま」
という状況が生じる


実際に、以下を満たす具体形を構成することが出来る：

$$A_{qm} = O(N^2) \quad \& \quad \begin{aligned} J(\rho^+) &= O(N) \\ \dot{\sigma}(\rho^+) &= O(1) \end{aligned}$$

➡「散逸なし熱流」の実現

応用：熱機関における古典限界を超えた性能増強


H. Tajima and K. Funo, PRL 127, 190604 (2021)

Current-dissipation trade-offは、熱機関の性能のトレードオフを与える
熱効率（燃費に相当）  仕事率（馬力に相当）
Trade-off for classical engines

「散逸のない熱流」を使うと、このトレードオフも実効的に無効化できる


我々は具体的なモデルを使って、以下を証明した：

$$\eta = \eta_{Car} - O(1/N)$$


$$P_{\max} = O(1/N)$$

古典エンジン

$$\eta = \eta_{Car} - O(1/N)$$


$$P_{\max} = O(N)$$

量子エンジン

大雑把に言うと、量子コヒーレンスで $O(N^2)$ の性能増強を引き起こすことができる。

SIQトレードオフ2: CPTP-mapでの結果

主結果：

$$\frac{c}{\sqrt{\mathcal{F}} + \Delta} \leq \delta \text{ or } \sqrt{\delta}$$

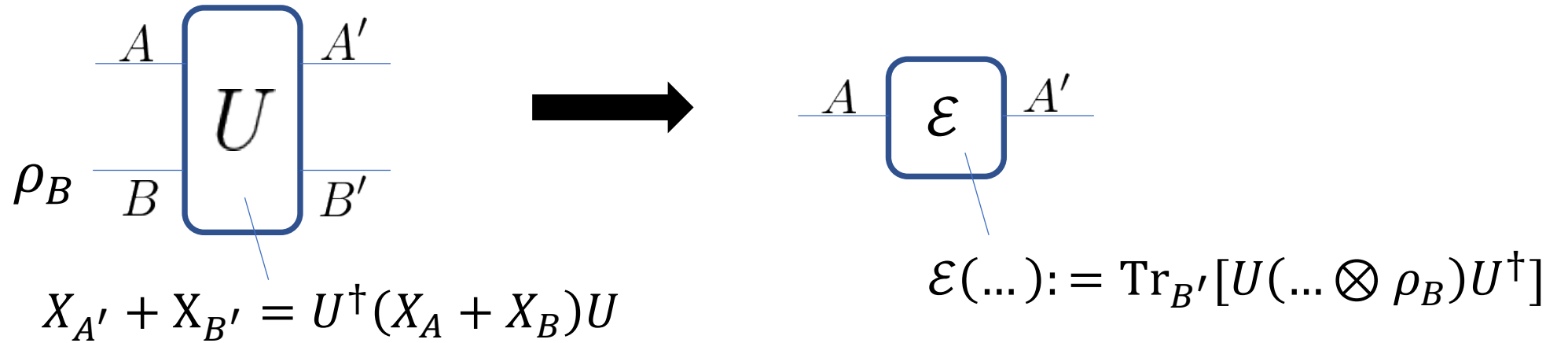
HT, R. Takagi, Y. Kuramochi arXiv:2206.11086 (2022)
HT and K. Saito, arXiv:2103.01876 (2021)

QIP2023 regular talk

単純だが、多くの対象に対して適用できる。

**適用例：量子計算ゲート・量子誤り訂正符号・量子測定・量子ブラックホール
・任意の量子熱力学的過程**

問題設定



結果：

\mathcal{C} ϵ がどの程度、局所保存量を変化させるかの度合いを表す係数

$$\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{\mathcal{F}} + \Delta} \leq \delta \text{ or } \sqrt{\delta}$$

$\sqrt{\mathcal{F}} + \Delta$ Bの持つコヒーレンス = Fisher情報量

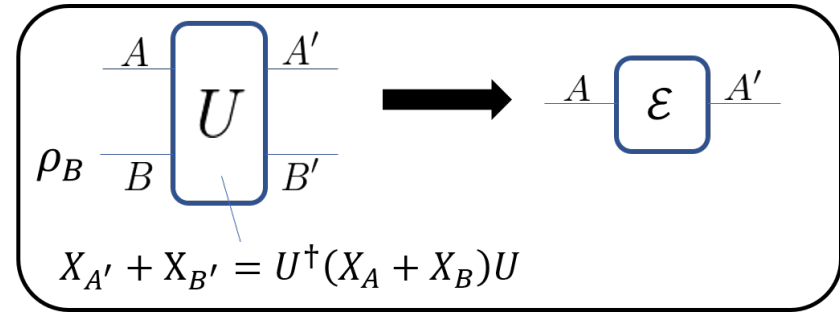
Δ 非負定数

δ ϵ の不可逆性

以降、順に説明する。 30

不可逆性指標 δ

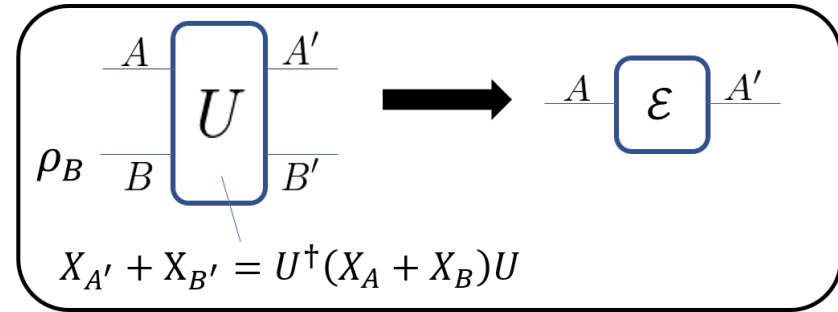
$$\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{\mathcal{F}} + \Delta} \leq \delta \text{ or } \sqrt{\delta}$$



不可逆性 δ : ε と “test ensemble” $\{p_k, \rho_k\}_{k \in \mathcal{K}}$ の関数

不可逆性指標 δ

$$\frac{c}{\sqrt{F} + \Delta} \leq \delta \text{ or } \sqrt{\delta}$$



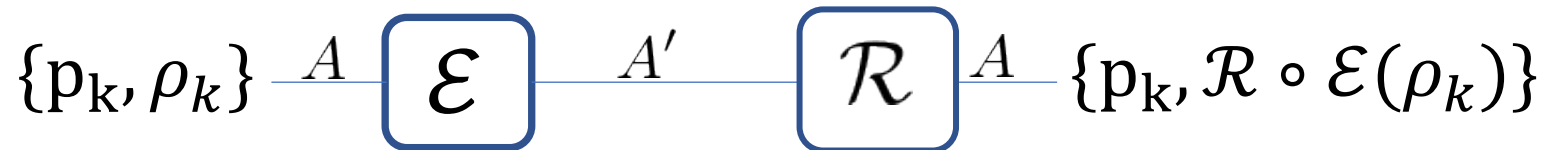
不可逆性 δ : ε と “test ensemble” $\{p_k, \rho_k\}_{k \in \mathcal{K}}$ の関数

$$\delta := \min_{\mathcal{R}: A' \rightarrow A} \sqrt{\sum_k p_k \delta_k^2}$$

$$\delta_k := D_F(\rho_k, \mathcal{R} \circ \varepsilon(\rho_k))$$

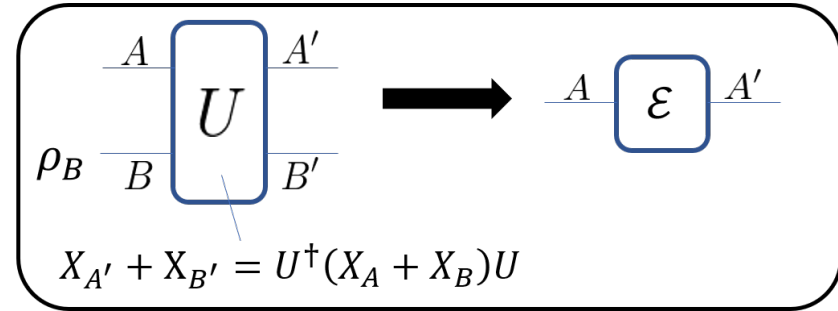
recovery error for ρ_k

$$D_F(\rho, \sigma) := \sqrt{1 - F^2(\rho, \sigma)}$$



不可逆性指標 δ

$$\frac{C}{\sqrt{F} + \Delta} \leq \delta \text{ or } \sqrt{\delta}$$



不可逆性 δ : ε と “test ensemble” $\{p_k, \rho_k\}_{k \in \mathcal{K}}$ の関数

$$\delta := \min_{\mathcal{R}: A' \rightarrow A} \sqrt{\sum_k p_k \delta_k^2}$$

$$\delta_k := D_F(\rho_k, \mathcal{R} \circ \varepsilon(\rho_k))$$

recovery error for ρ_k

$$D_F(\rho, \sigma) := \sqrt{1 - F^2(\rho, \sigma)}$$

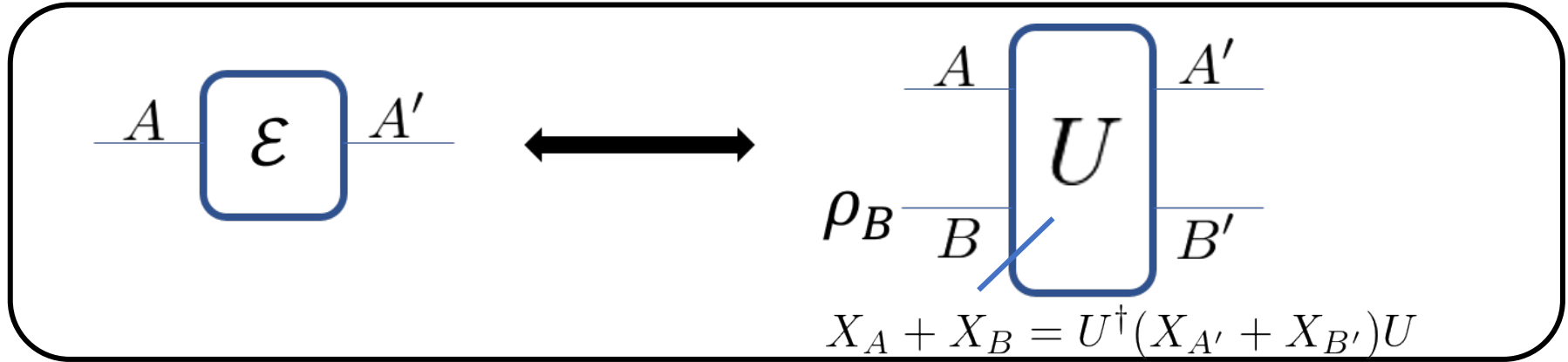
重要な性質: δ は様々な不可逆指標を下からバウンドする.

$$\delta \leq \sqrt{\Sigma}, \quad \delta \leq \delta_Q, \quad \text{and} \quad \delta \leq \frac{\delta_P}{\sqrt{2}},$$

e.g. the entropy production, the entanglement-fidelity recovery error, and the error of Petz map recovery, etc.

コヒーレンス量指標：SLD-Fisher情報量

$$\frac{c}{\sqrt{\mathcal{F}} + \Delta} \leq \delta \text{ or } \sqrt{\delta}$$



$$\mathcal{F} := \mathcal{F}_{\rho_B}(X_B)$$

SLD-Quantum Fisher information for state family $\{e^{-iXt}\rho e^{iXt}\}$:

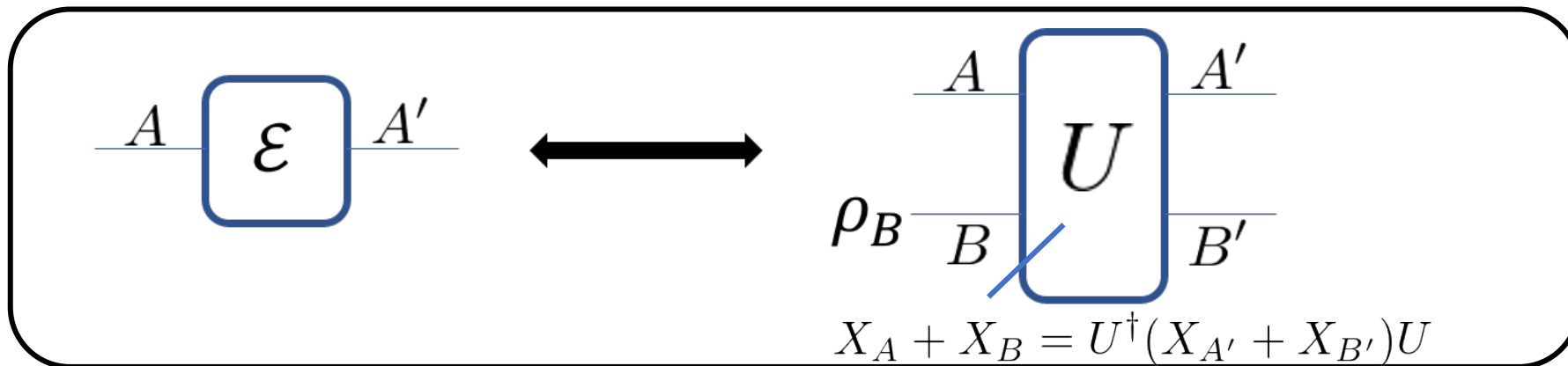
$$\mathcal{F}_\rho(X) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{D_F(\rho, e^{-iXt}\rho e^{iXt})^2}{t^2}$$

重要な性質 1: resource theory of asymmetryのリソース指標

C. Zhang, et al., Physical Review A 96, 042327 (2017).
 R. Takagi, Scientific Reports 9, 14562 (2019).

コヒーレンス量指標：SLD-Fisher情報量

$$\frac{c}{\sqrt{\mathcal{F}} + \Delta} \leq \delta \text{ or } \sqrt{\delta}$$



$$\mathcal{F} := \mathcal{F}_{\rho_B}(X_B)$$

SLD-Quantum Fisher information for state family $\{e^{-iXt}\rho e^{iXt}\}$:

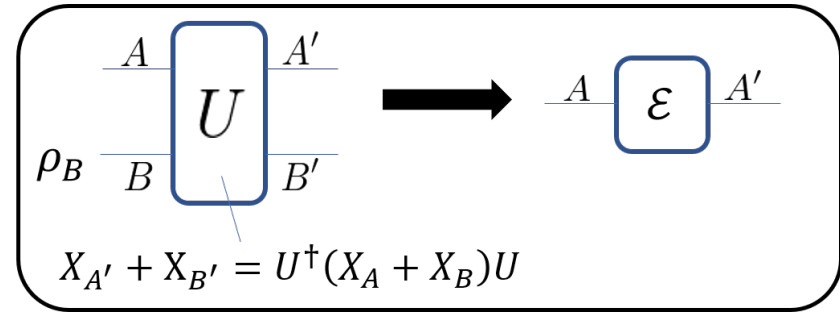
$$\mathcal{F}_\rho(X) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{D_F(\rho, e^{-iXt}\rho e^{iXt})^2}{t^2}$$

重要な性質 2：物理量Xの量子揺らぎの標準的指標

$$\mathcal{F}_\rho(X) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{D_F(\rho, e^{-iXt}\rho e^{iXt})^2}{t^2} = 4 \min_{\{q_j, \phi_j\}: \rho = \sum_j q_j \phi_j} \sum_j q_j V_{\phi_j}(X)$$

局所保存量の変化についての指標

$$\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{\mathcal{F}} + \Delta} \leq \delta \text{ or } \sqrt{\delta}$$



\mathcal{C} : 局所保存量の変化の程度を表す

$$\mathcal{C} := \sqrt{\sum_{k \neq k'} p_k p_{k'} \text{Tr}[(\rho_k - \rho_{k'})_+ Y_A (\rho_k - \rho_{k'})_- Y_A]}$$

$(O)_\pm$:= Positive (negative) part of the Hermitian operator O

$Y_A := X_A - \varepsilon^\dagger(X_{A'})$ 局所保存量の変化の演算子

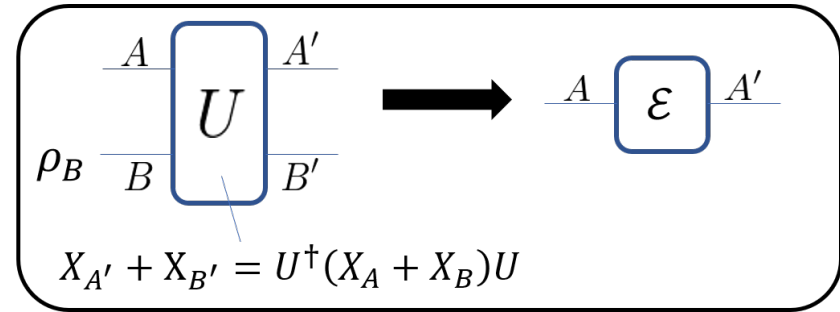
重要性質: • test states $\{\rho_k\}$ が正規直交する純粋状態 $\{|\psi_k\rangle\}$ のとき,

$$\mathcal{C} = \sum_{k \neq k'} p_k p_{k'} |\langle \psi_k | Y_A | \psi_{k'} \rangle|^2 \quad Y_A \text{ の非対角成分の絶対値の和}$$

• ε が X_A を non-trivial に変化させる (i.e. $Y_A \propto 1_A$) $\Rightarrow \mathcal{C} > 0$

Main result

$$\frac{c}{\sqrt{\mathcal{F}} + \Delta} \leq \delta \text{ or } \sqrt{\delta}$$

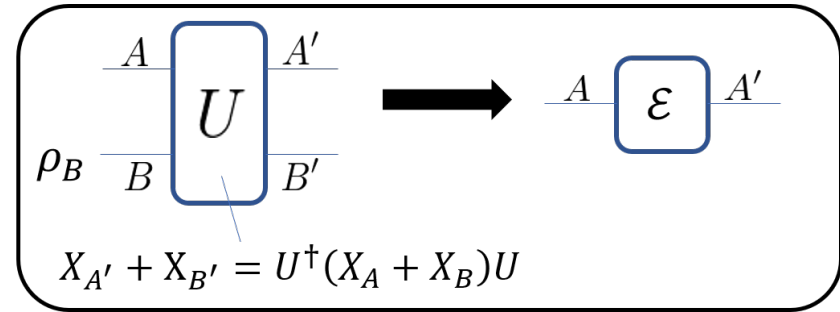


完全に一般のアンサンブル

アンサンブル $\{p_k, \rho_k\}$ の各 ρ_k が互いに直交する時
i.e., $F(\rho_k, \rho_{k'}) = 0$ for $k \neq k'$

Messages of main result

$$\frac{c}{\sqrt{\mathcal{F}} + \Delta} \leq \delta \text{ or } \sqrt{\delta}$$



1. $c > 0 \Rightarrow \delta > 0$

➡ ε が局所保存量を変化させるとき, ε は不可逆でなくてはならない

2. Bの持つコヒーレンス ($= \mathcal{F}$)は、その不可逆性を和らげることが出来る。

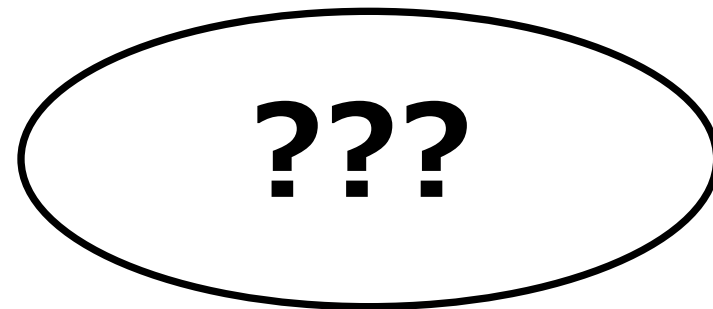
Take home message:

大域的対称性の下で、局所保存量を変化させる試みは不可逆性をもたらす。しかし、この不可逆性は、局所保存量のコヒーレンスを用いて和らげることが出来る

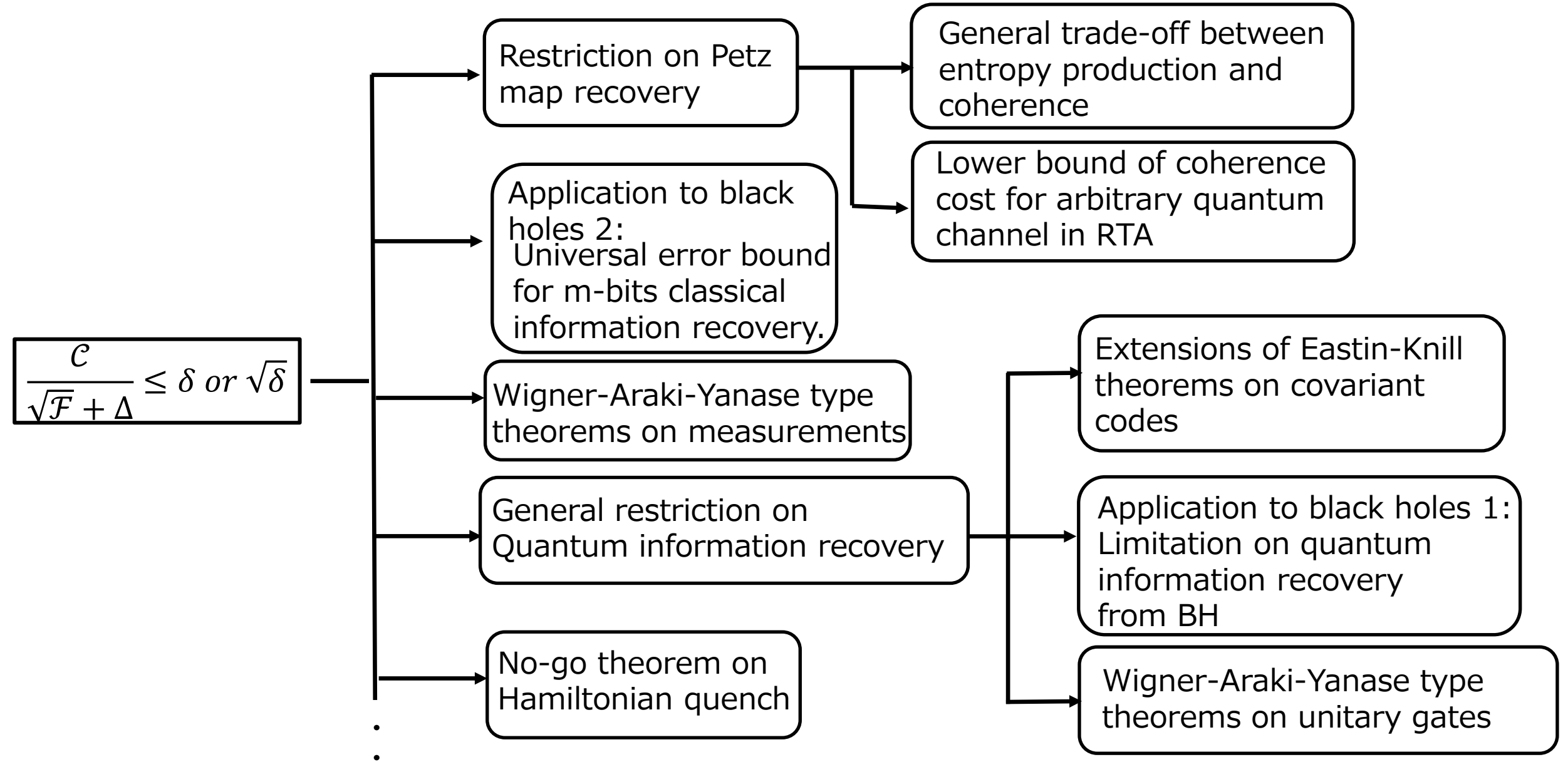
➡ **SIQ trade-off!**

Applications?

$$\frac{c}{\sqrt{\mathcal{F}} + \Delta} \leq \delta \text{ or } \sqrt{\delta}$$



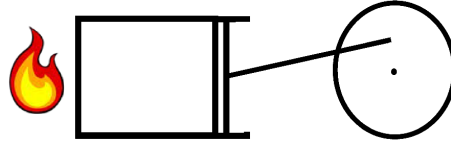
Applications of S-I-Q tradeoff



SIQ定理の応用 (単純化)

Main Theorem:
Trade-off between symmetry,
irreversibility and coherence
$$\frac{c}{\sqrt{\mathcal{F}+\Delta}} \leq \delta \text{ or } \sqrt{\delta}$$

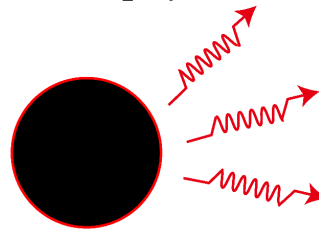
Thermodynamic processes:



Trade-off between entropy production
and quantum coherence:

$$\sqrt{\Sigma_{\beta}(\rho)} \geq \frac{c^2}{(\sqrt{\mathcal{F}_{\rho_C}(X_C)} + \Delta)^2}$$

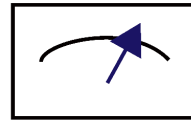
black hole physics:



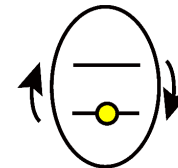
Universal error bound for m-bits
classical information recovery:

$$\delta_H \geq \frac{m}{4} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{3}{a\gamma}\right)^2}$$

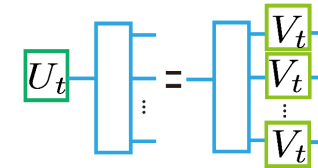
Quantum information processings:



Quantitative WAY theorem
for fidelity error



Coherence costs
on gate implemetations



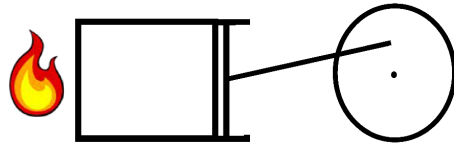
Extension of
Eastin-Knill theorem

⋮

SIQ定理の応用 (単純化)

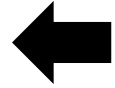
Main Theorem:
Trade-off between symmetry,
irreversibility and coherence
$$\frac{c}{\sqrt{\mathcal{F}+\Delta}} \leq \delta \text{ or } \sqrt{\delta}$$

Thermodynamic processes:

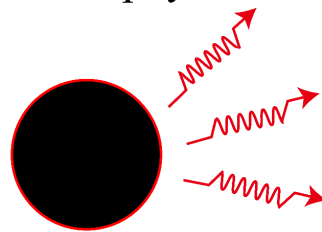


Trade-off between entropy production
and quantum coherence:

$$\sqrt{\Sigma_{\beta}(\rho)} \geq \frac{c^2}{(\sqrt{\mathcal{F}_{\rho_C}(X_C)} + \Delta)^2}$$



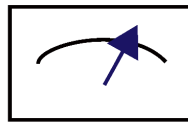
black hole physics:



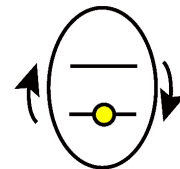
Universal error bound for m-bits
classical information recovery:

$$\delta_H \geq \frac{m}{4} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{3}{a\gamma}\right)^2}$$

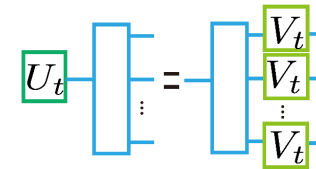
Quantum information processings:



Quantitative WAY theorem
for fidelity error



Coherence costs
on gate implemetations



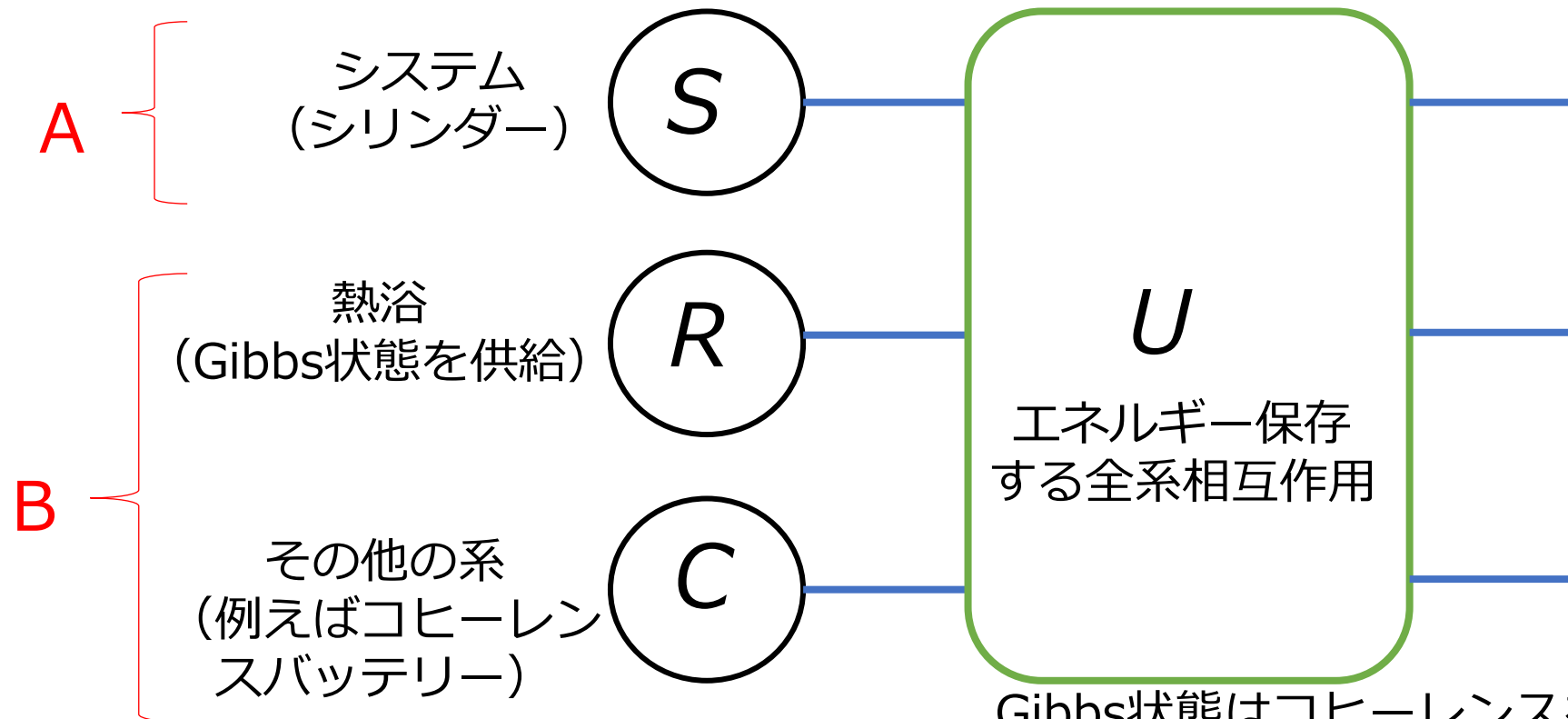
Extension of
Eastin-Knill theorem

⋮

SIQ定理の量子熱力学的過程への応用

熱力学的過程においてSIQ定理がどう適用されるかを見る。

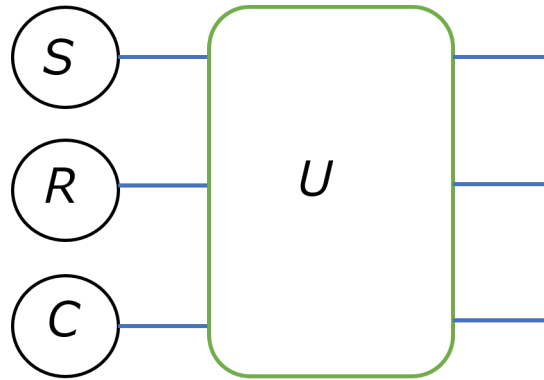
単純のために、熱浴が一つの場合を考える。この時、熱力学的過程は以下の様に理解できる：



Gibbs状態はコヒーレンスを持たないので、我々の式で、C系のコヒーレンスだけを調べられる

SIQ定理の量子熱力学的過程への応用

この設定の下で、S系において任意の等温過程 ε を実現するためのコストを求めることができる。



$$\mathcal{F}_{\text{cost}} \geq \frac{c^2}{\sqrt{\Sigma}} - \Delta^2$$

ε における「熱力学的エントロピーの増大量」 Σ と、 ε を実現するためにC系に用意しなければならないコヒーレンスの量 \mathcal{F}_C は、上記を満たす。

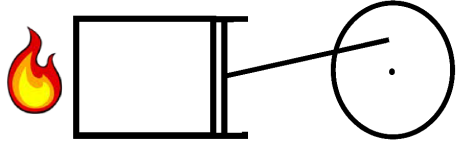
任意の熱力学的過程を実現する際のコヒーレンス・コストの下界

SIQが及ぶ不可逆性の範囲が、熱力学的不可逆性をきちんと含んでいることも重要

SIQ定理の応用 (単純化)

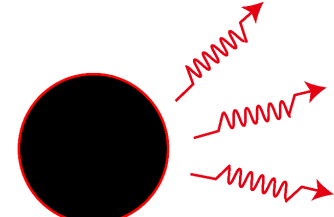
Main Theorem:
Trade-off between symmetry,
irreversibility and coherence
$$\frac{c}{\sqrt{\mathcal{F}+\Delta}} \leq \delta \text{ or } \sqrt{\delta}$$

Thermodynamic processes:



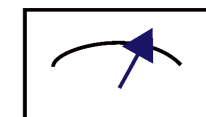
Trade-off between entropy production
and quantum coherence:
$$\sqrt{\Sigma_{\beta}(\rho)} \geq \frac{c^2}{(\sqrt{\mathcal{F}_{\rho_C}(X_C)}+\Delta)^2}$$

black hole physics:

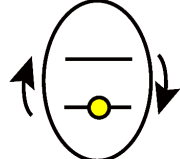


Universal error bound for m-bits
classical information recovery:
$$\delta_H \geq \frac{m}{4} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{3}{a\gamma}\right)^2}$$

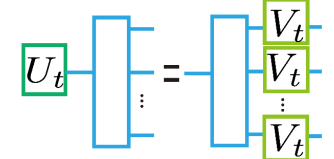
Quantum information processings:



Quantitative WAY theorem
for fidelity error



Coherence costs
on gate implemetations



Extension of
Eastin-Knill theorem

⋮

SIQ定理の量子情報処理への応用

すでに説明したように、対称性による量子情報処理への制限には様々なものが知られている

Measurement : WAY定理

反比例 : (任意測定)

測定誤差 \Leftrightarrow 測定実装に必要なコヒーレンス

E. P. Wigner, Z. Phys. 133, 101 (1952).

H. Araki and M. M. Yanase, Phys. Rev. 120, 622 (1960).

M. M. Yanase, Phys. Rev. 123, 666 (1961).

M. Ozawa, Phys. Rev. Lett. 88, 050402 (2002).

H. Tajima and H. Nagaoka, arXiv:1909.02904 (2019)

Unitary gates : ユニタリーWAY定理

反比例 : (任意ユニタリー)

実装誤差 \Leftrightarrow ゲート実装に必要なコヒーレンス

M. Ozawa, Phys. Rev. Lett. 89, 057902 (2002).

H. Tajima, N. Shiraishi and K. Saito, Phys. Rev. Lett. 121, 110403 (2018).

H. Tajima, N. Shiraishi and K. Saito, Phys. Rev. Research. 2, 043374 (2020).

Error correction : Eastin-Knill定理

反比例 : (任意トランスバーサル符号)

復号誤差 \Leftrightarrow 符号に必要なqubit数

B. Eastin and E. Knill, Phys. Rev. Lett. 102, 110502 (2009).

P. Faist, S. Nezami, V. V. Albert, G. Salton, F. Pastawski, P.

Hayden, and J. Preskill, Phys. Rev. X 10, 041018 (2020).

これらすべてが、SIQ定理のコロラリー

→対称性から量子情報処理の制限は、一つの定理のそれぞれの特殊部分

SIQ定理の量子情報処理への応用

我々の結果は既存の定理の再現だけではなく、拡張も行う：

Measurement : WAY定理

反比例 : (任意測定)

測定誤差 \Leftrightarrow 測定実装に必要なコヒーレンス

Unitary gates : ユニタリーWAY定理

反比例 : (任意ユニタリー)

実装誤差 \Leftrightarrow ゲート実装に必要なコヒーレンス

Error correction : Eastin-Knill定理

反比例 : (任意トランスバーサル符号)

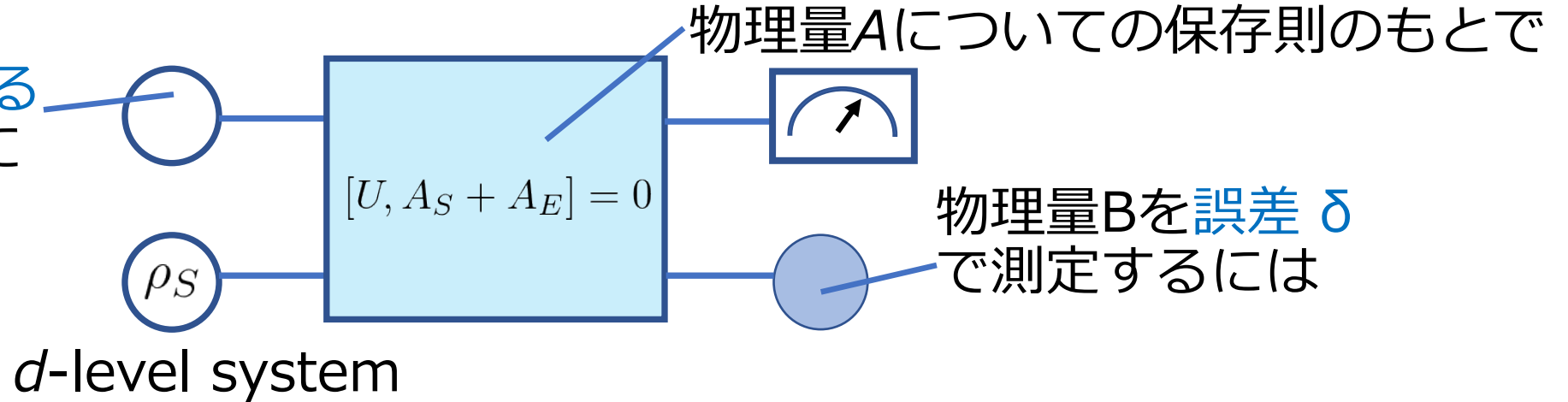
復号誤差 \Leftrightarrow 符号に必要なqubit数

3つのすべてに対して拡張を与えるが、特に測定のWAY定理に対して与える結果が強力なので、これを紹介する。

SIQ定理の測定への応用

WAY-Ozawa定理

保存量A_Eの分散（あるいは量子揺らぎ）が δ に反比例して必要になる



ここでいう誤差は、いわゆるOzawaの誤差

しかし、誤差の定義にはいろいろある：

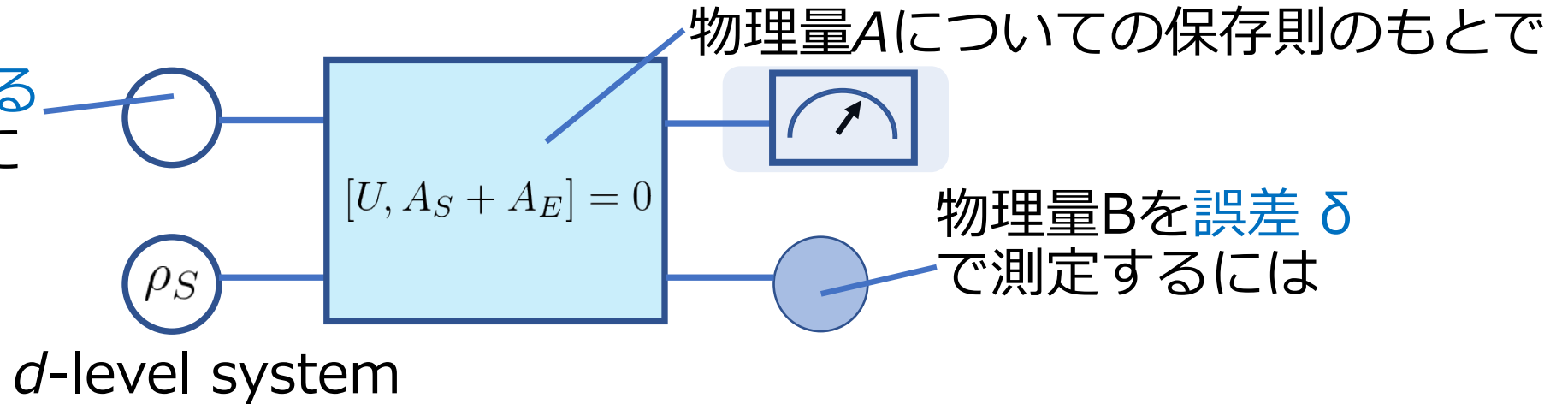
- Arthur-Goodman's error and disturbance
- Watanabe-Sagawa-Ueda's error and disturbance
- Busch-'s error and disturbance

これらについては、WAY的な定理が成立するかは知られていなかった

SIQ定理の測定への応用

WAY-Ozawa定理

保存量 A_E の分散（あるいは量子揺らぎ）が δ に反比例して必要になる



ここでいう誤差は、いわゆるOzawaの誤差

さらに、WAY-Ozawa定理には一つ重要な仮定があった：

Yanase条件：プローブ側の測定演算子が保存量と可換でないといけない

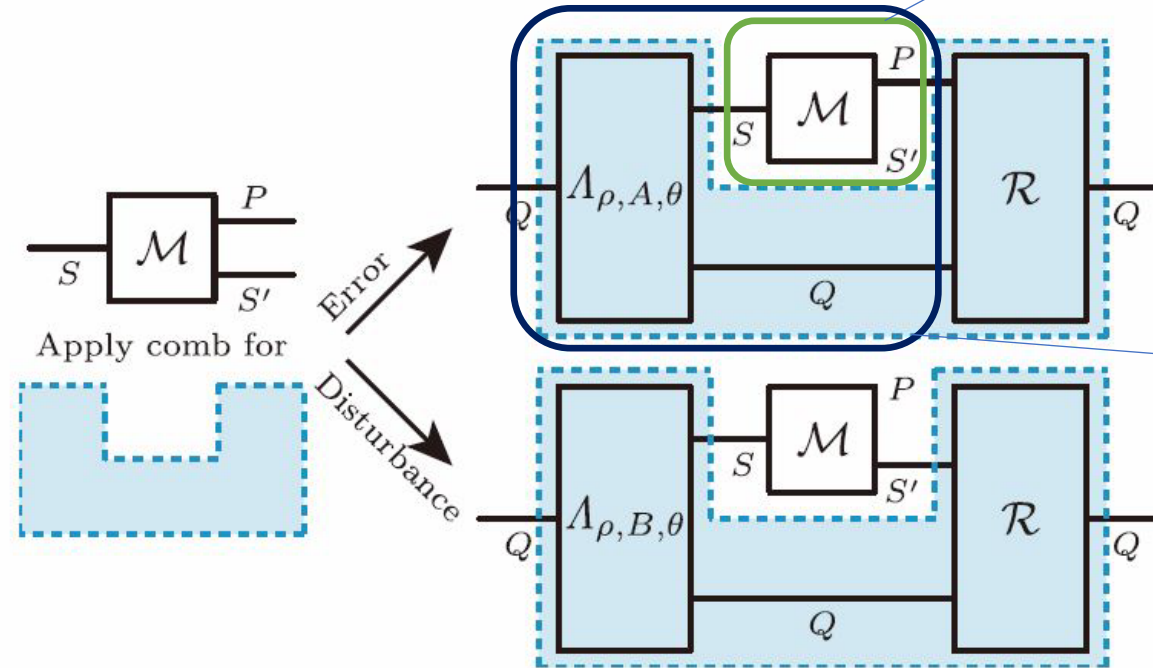
しかし、「プローブ側の測定」への仮定が必要なのは本来不自然

実は、SIQ定理を経由することで、これらの問題を解決できる

SIQ定理の測定への応用：誤差と擾乱は不可逆性！

H. Emori and H. Tajima, arXiv:2309.14172 (2023)

以下のプロトコルによって、測定プロセスMの誤差と擾乱を、別の量子チャンネルの不可逆性に変換できる：



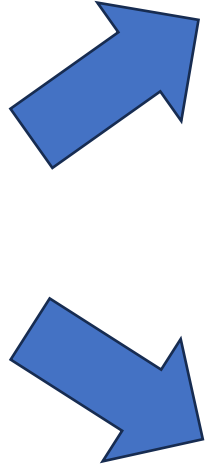
誤差: リカバリプロセスに**測定値**を使い，測定後の状態は使わない。

擾乱: リカバリプロセスに**測定後の非選択的状态**を使い，測定値は使わない。

SIQ定理の測定への応用：誤差と擾乱は不可逆性！

H. Emori and H. Tajima, arXiv:2309.14172 (2023)

このような変換を使うことで、SIQ不等式がそのまま、色々な誤差や擾乱に対するWAY定理になる。

$$\frac{c}{\sqrt{\mathcal{F}} + \Delta} \leq \delta$$

$$\frac{|\langle [Y_S, A] \rangle_\rho|}{\sqrt{\mathcal{F}_{\mathcal{P}_M}^{cost} + \Delta_F}} \leq \epsilon(\rho, A, \mathcal{M}) \quad Y_S := X_S - \varepsilon^\dagger(X_P)$$
$$\frac{|\langle [Y'_S, A] \rangle_\rho|}{\sqrt{\mathcal{F}_{\mathcal{J}_M}^{cost} + \Delta_F}} \leq \eta(\rho, A, \mathcal{M}) \quad Y_S := X_S - \varepsilon^\dagger(X_{S'})$$

これらはYanase条件を仮定しない、より一般の不等式になっている。
もしYanase条件に対応する条件を仮定した場合、 $Y_S = Y'_S = X_S$ が成立し、従来のWAY-Ozawa不等式（の任意エラー／擾乱版）が与えられる。

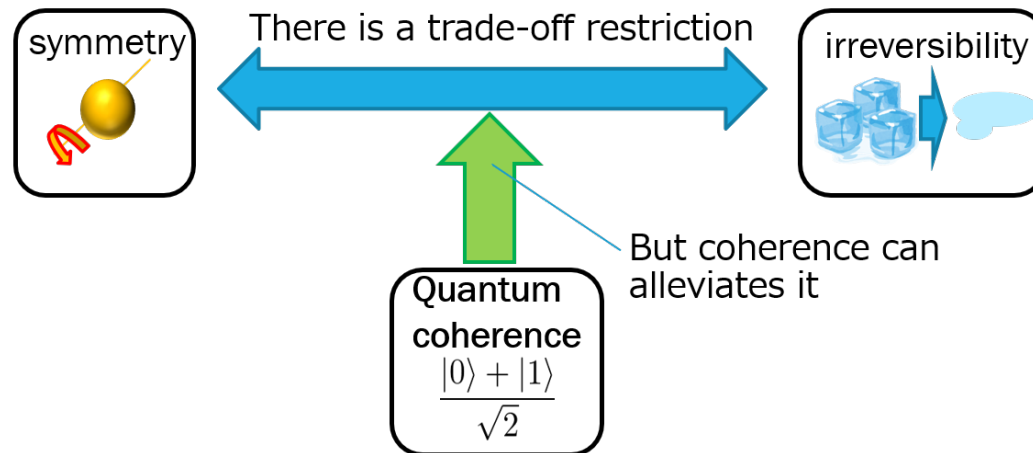
まとめ

まとめ

$$\frac{c}{\sqrt{\mathcal{F}} + \Delta} \leq \delta \text{ or } \sqrt{\delta}$$

$$\frac{2J(\rho)^2}{A_{\text{qm}} + A_{\text{cl}}} \leq \dot{\sigma}(\rho)$$

局所保存量変化
コヒーレンス + 定数 \leq 不可逆性



SIQ構造を定理として具体化できたと考えている。

SIQ構造の（現時点での）応用範囲

SIQ構造の直接的応用

1. WAY定理、unitary WAY定理、Eastin-Knill定理の統一と拡張
(Tajima-Saito arXiv 2021, Tajima-Takagi-Kuramochi arXiv2022, QIP 2023)
➡それぞれについて拡張あり
2. 熱機関の性能のオーダーレベル強化 (Tajima-Funo PRL 2021)
➡エネルギーデバイスの量子優位性を証明
3. 量子重力への応用
(Tajima-Saito arXiv 2021, Tajima-Takagi-Kuramochi arXiv2022, QIP 2023)
➡ブラックホールの情報脱出に対する保存則の制限
4. 不確定性関係・OTOCへの応用 (Emori -Tajima arXiv 2023)
➡OTOCや不確定性の既存の誤差・擾乱は、
 全てSIQ定理の不可逆性 δ の特殊な場合。
➡SIQ定理は、対称性がこれらにもたらす制限を予言する

他にも、いくつかの直接的応用を得ている

SIQ構造の（現時点での）応用範囲

SIQ構造の間接的応用（手法レベルの応用）

1. WAY定理の連続かつunboundedな保存量に対する拡張
(Kuramochi-Tajima PRL 2023b)
➡1960年以來の未解決問題の一つの解決。
➡運動量保存則の下で、位置は単体でも誤差なく測定できない！
2. Error mitigationのサンプリングコスト限界についてのバウンド
(Takagi-Tajima-Gu PRL 2023c)
➡量子誤り抑制では量子回路の深さについて
指数的なサンプリングコストが必ず必要となる

以上、これまでにSIQが適用された対象をまとめると：

量子誤り訂正符号、量子測定、量子計算（ユニタリーゲート）実装、量子熱機関、ブラックホール、OTOC、不確定性原理（の誤差・擾乱）、error mitigationなど

➡ある程度広く応用できる、普遍的な理論の構築に成功しつつあると考えている。

SIQ構造の（現時点での）応用範囲

Q: WAY定理は役に立つのか？

A: WAY定理は直接は役に立たないが、色々な発展形が出てきた。それらは役に立つ！

注：WAYでは「不可逆性とコヒーレンス」のトレードオフは扱ってはいないので、若干正確さに賭けるかも・・・？

今後の展望と取り組むべき課題

SIQ構造の理論を、さらに発展させていきたい。

- ・ より広い対象への応用
- ・ より広い範囲の対称性・距離尺度への拡張
- ・ 得られた結果の実験室レベルでの検証

こうしたSIQ構造の拡張のために、土台となるRTAの基礎を拡張した：

U(1)対称性におけるnon-iidの理論

K. Yamaguchi and H. Tajima, Phys. Rev. Lett. **131**, 200203 (2023)

K. Yamaguchi and H. Tajima, Quantum **7**, 1012 (2023).

一般のコンパクトかつ連結なリー群において、Fisher情報行列がリソース指標になることの証明

D. Kudo and H. Tajima, Phys. Rev. A **107**, 062418 (2023).

任意有限群と、一般のコンパクトかつ連結なリー群におけるiid convertibilityの理論 (Lie群の方はconverse partのみ)

T. Shitara* and H. Tajima*, arXiv:2312.15758 (2023).

今後も本プロジェクトを推し進め、RTAの基礎を完成させるとともに、「対称性・不可逆性・量子性が交わるすべての対象に使える理論」を構築していきたい！

Appendix

応用：熱機関の性能向上

我々の結果からは、熱機関のオーダーレベルでの性能向上が（トイモデルで）得られる。

まず、「仕事率を $O(N)$ にしつつ、効率をカルノーに近づける」ことは、古典マルコフなエンジンでは決して不可能であることが知られている：

$$\dot{\sigma} \times \Theta \geq J^2 \quad \Rightarrow \quad P \leq \bar{\Theta} \beta_L \eta (\eta_{\text{Car}} - \eta) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \eta = \eta_{\text{Car}} - O(1/N) \\ \Downarrow \\ P = O(1) \end{array}$$

N. Shiraishi, K. Saito, and H. Tasaki
Phys. Rev. Lett. **117**, 190601

注：仕事などの示量変数は $o(N)$ の場合、熱力学的には0として扱われる。
例えば熱力学において揺らぎは無視できるが、これは $O(\sqrt{N})$ 。

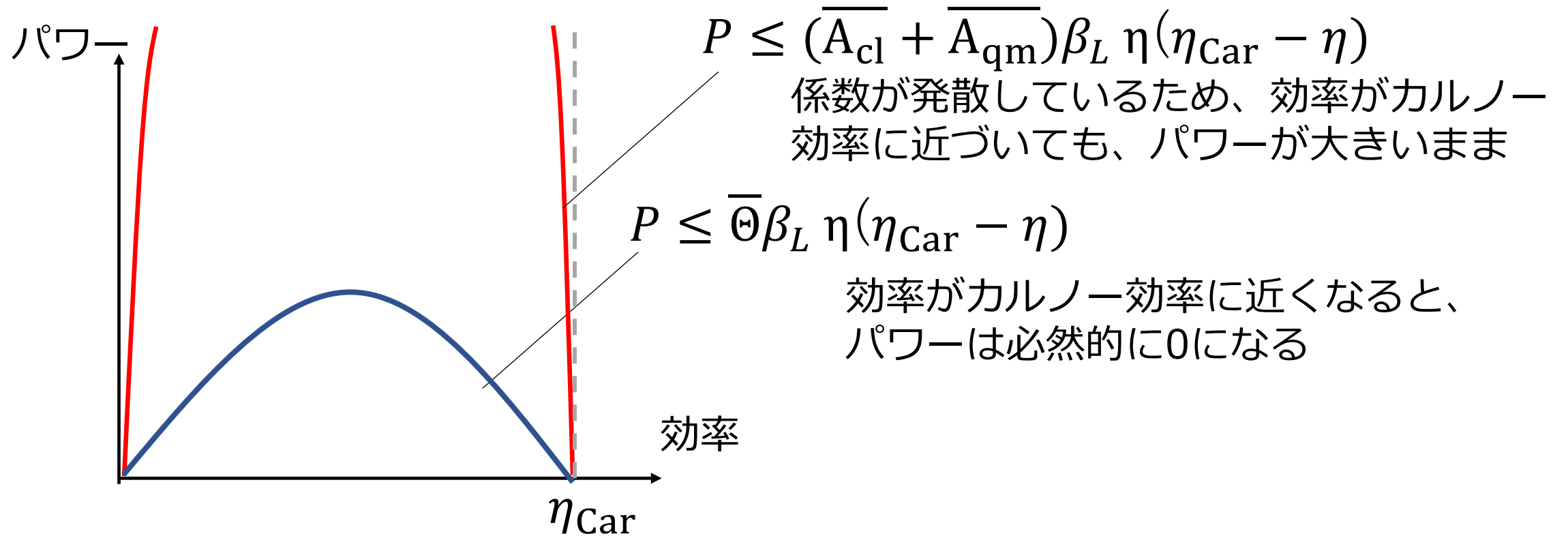
これは、 $\bar{\Theta}$ の部分が、古典では高々 $O(N)$ までしか向上させられないから。

量子では、この限界を突破できる。これは、 A_{qm} を $O(N^2)$ まで増幅できるためである。

$$\frac{2J(\rho)^2}{A_{\text{qm}} + A_{\text{cl}}} \leq \dot{\sigma}(\rho) \quad \Rightarrow \quad P \leq (\bar{A}_{\text{cl}} + \bar{A}_{\text{qm}}) \beta_L \eta (\eta_{\text{Car}} - \eta) \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{c} \eta = \eta_{\text{Car}} - O(1/N) \\ P = O(N) \end{array}$$

古典と量子の違い：グラフで見る違い

前スライドで見た古典と量子の違いは、パワーと効率のグラフを介してみることでよりはっきりとわかる：



Motivation: SIQ tradeoff for discrete symmetry

U(1)-symmetry.

$$\frac{\mathcal{C}}{\sqrt{\mathcal{F}} + \Delta} \leq \delta$$



Discrete symmetry.

???



Lie-group symmetry.

$$\hat{\mathcal{C}} \leq \delta(\sqrt{\hat{\mathcal{F}}} + \hat{\Delta})$$

Extension of RTA to discrete symmetry is necessary!

Resource theory of asymmetry (RTA)

The RTA is a resource theory treating symmetry of quantum systems.

	Entanglement theory	RTA
Free states	Separable states	Symmetric states
Free operations	LOCC	Covariant operations
Resource measure	Entanglement entropy	Fisher information, and...

In the next several slides, we define the right column one by one.

Resource theory of asymmetry(RTA)

Free states: symmetric states

$$\rho \text{ is symmetric} \Leftrightarrow_{\text{def}} \mathcal{U}_g(\rho) = \rho, \forall g \in G$$

$$\mathcal{U}_g(\rho) := U_g \rho U_g^\dagger$$

Free operations: covariant operations

$$\mathcal{E} \text{ is covariant} \Leftrightarrow \mathcal{E} \circ \mathcal{U}_g = \mathcal{U}_g \circ \mathcal{E}, \forall g \in G.$$

Resource theory of asymmetry(RTA)

The RTA is a resource theory treating symmetry of quantum systems.

Let us introduce **free states**, **free operations** and **a resource measure** in RTA

Free operations: covariant operations

$$\mathcal{E} \text{ is covariant} \Leftrightarrow \mathcal{E} \circ \mathcal{U}_g = \mathcal{U}_g \circ \mathcal{E}, \forall g \in G.$$

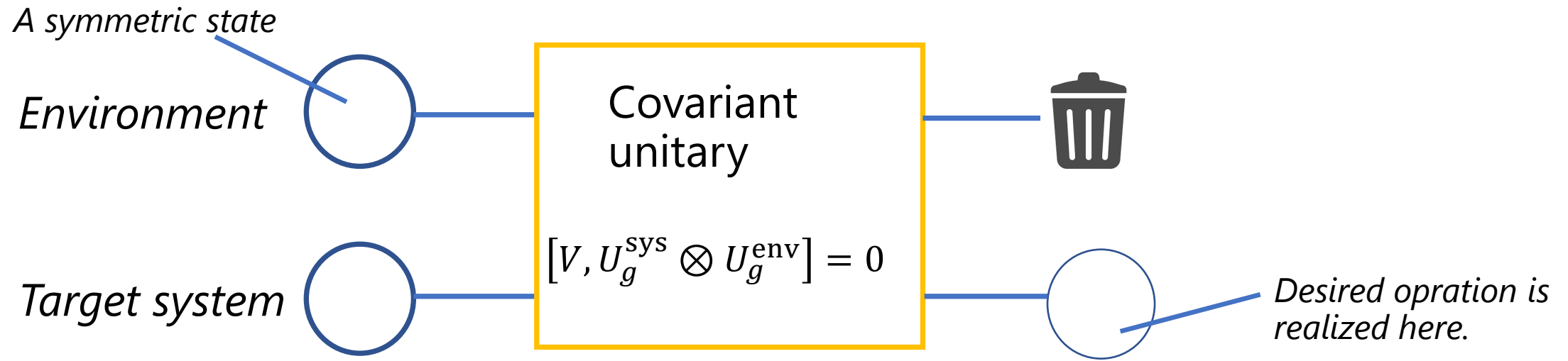
Property of covariant operations:

- A generalization of covariant unitary:

U satisfying $[U, A]=0$ is a covariant operation

Resource theory of asymmetry(RTA)

Property of covariant operations:



An operation C can be implemented as above

$\Leftrightarrow C$ is a covariant operation for A

Resource theory of asymmetry(RTA)

Resource measure for U(1) case: quantum Fisher information (QFI)

SLD Fisher information for a state family $\{\rho_t\}$: $\rho_t = e^{-iAt} \rho e^{iAt}$

$$\mathcal{F}_\rho(A) := 2 \sum_{a,b} \frac{(p_a - p_b)^2}{p_a + p_b} |A_{ab}|^2$$

$$A_{ab} := \langle \psi_a | A | \psi_b \rangle$$

$\{p_a, \psi_a\}$ is eigenvalues and eivenvectors of ρ

QFI determines the conversion rate of iid state transformation.

I. Marvian, Nature Communications 11, 25 (2020).

Resource measure for compact Lie group symmetry: quantum Fisher information

D. Kudo and H. Tajima: PRA 2023

Question: How about the discrete symmetry?

Resource theory of asymmetry(RTA)

T. Shitara* and H. Tajima*, arXiv:2312.15758 (2023).

Conversion ratio for discrete symmetry (arbitrary finite Abelian group):

In this case, there are no single resource measure determining the conversion ratio of iid state transformation.

But the conversion rate itself is determined:

$$R(\psi \mapsto \phi) := \min_{\vec{a} \in G - \{\vec{0}\}} \frac{\log |\lambda_{\vec{a}}(\psi)|}{\log |\lambda_{\vec{a}}(\phi)|}$$

Namely, there are resource measures $\{|\log |\lambda_{\vec{a}}(\psi)|\}_{\vec{a} \in G - \{\vec{0}\}}$, and the conversion rate is equal to the minimum of the ratios $\frac{\log |\lambda_{\vec{a}}(\psi)|}{\log |\lambda_{\vec{a}}(\phi)|}$.

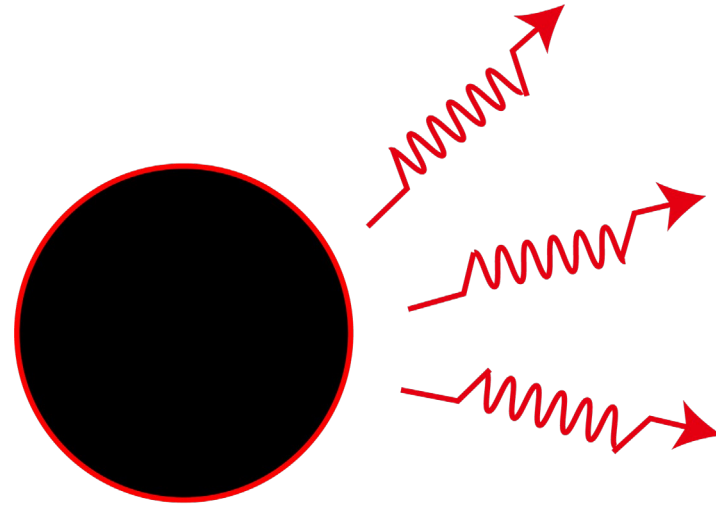
We also derive results for arbitrary finite group and arbitrary compact Lie group!

背景：ブラックホールからの情報回復問題

S.Hawking:

ブラックホールは温度を持っており、黒体輻射を出している

= ホーキング輻射



ブラックホールからの情報回復:

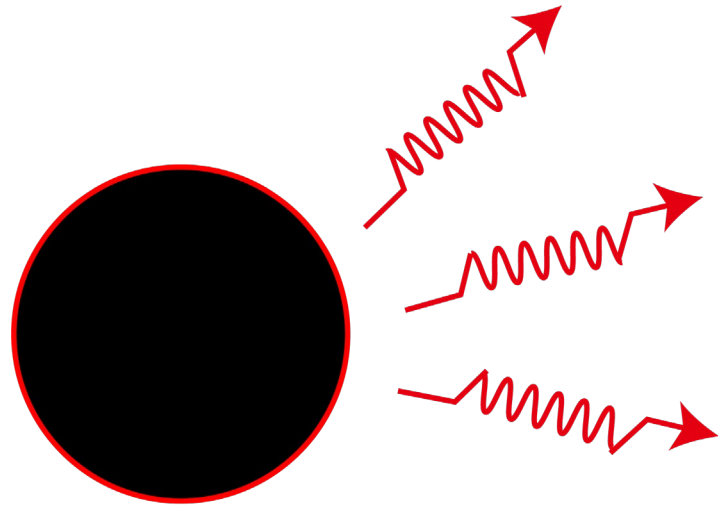
ブラックホールに飲み込まれた物体の中にあつた情報を、
ホーキング輻射を介して読み出すこと（または読み出す試み）

背景：ブラックホールからの情報回復問題

S.Hawking:

ブラックホールは温度を持っており、黒体輻射を出している

= ホーキング輻射



重要な問題：そもそも読み出せるのか？

現状のコンセンサス：ブラックホールの中のダイナミクスは「遠方の観測者にとって」ユニタリーであり、情報回復は（恐らく）可能

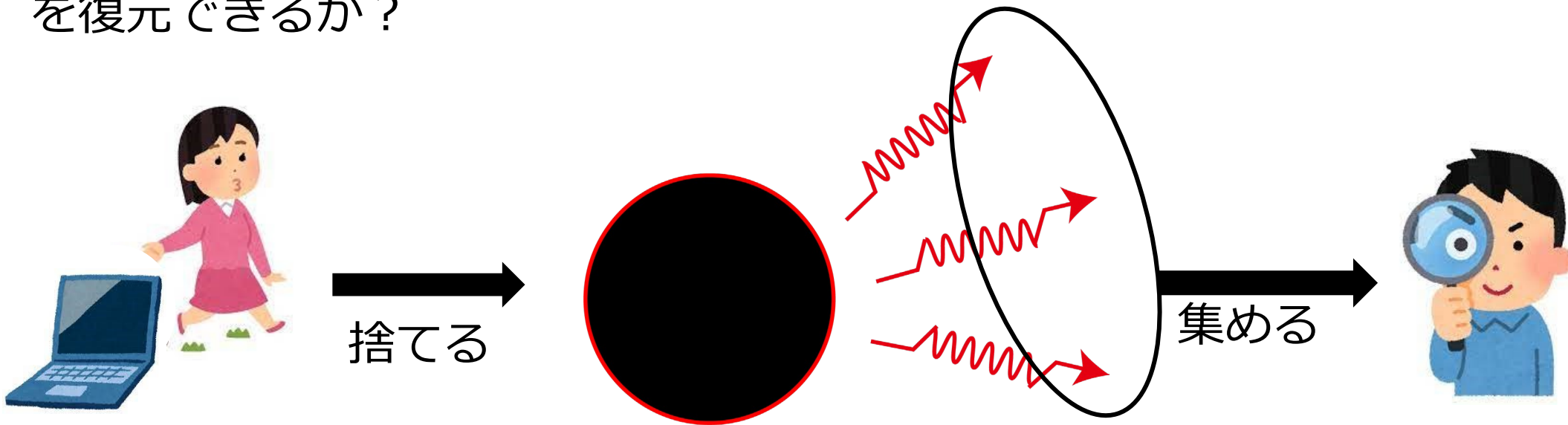
➡次なる疑問：どのくらい取り出せるのか？

背景2：Hayden-Preskill思考実験

アリスが量子コンピュータのデータを隠すために、ブラックホールに投げ込む。

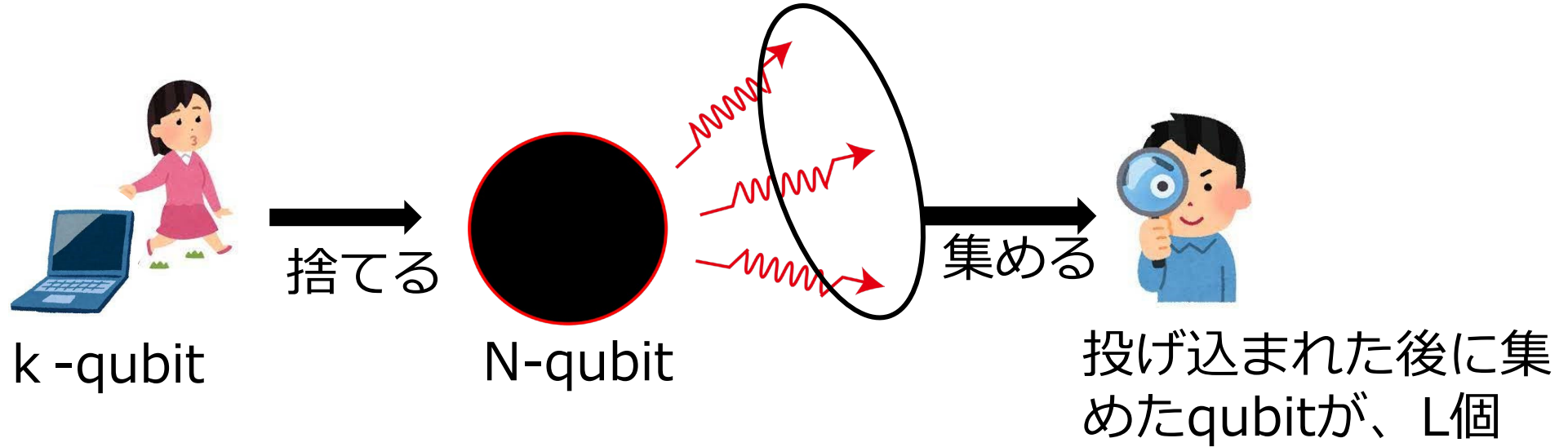
ところが、ボブはブラックホールから出るホーキング輻射を、ブラックホールができたときから、アリスがコンピュータを投げ込んだ後まで含めてずっと集めていた。

ボブはアリスがコンピュータを投げ込んでから、どのくらいでコンピュータのデータを復元できるか？



我々の結果は、この問題に適用できる

Hayden-Preskillの解析



仮定:

- ・ブラックホール、コンピュータ、ホーキング輻射は全てqubitの集合体とみなせる
- ・ブラックホールのダイナミクスはHaar random unitaryである

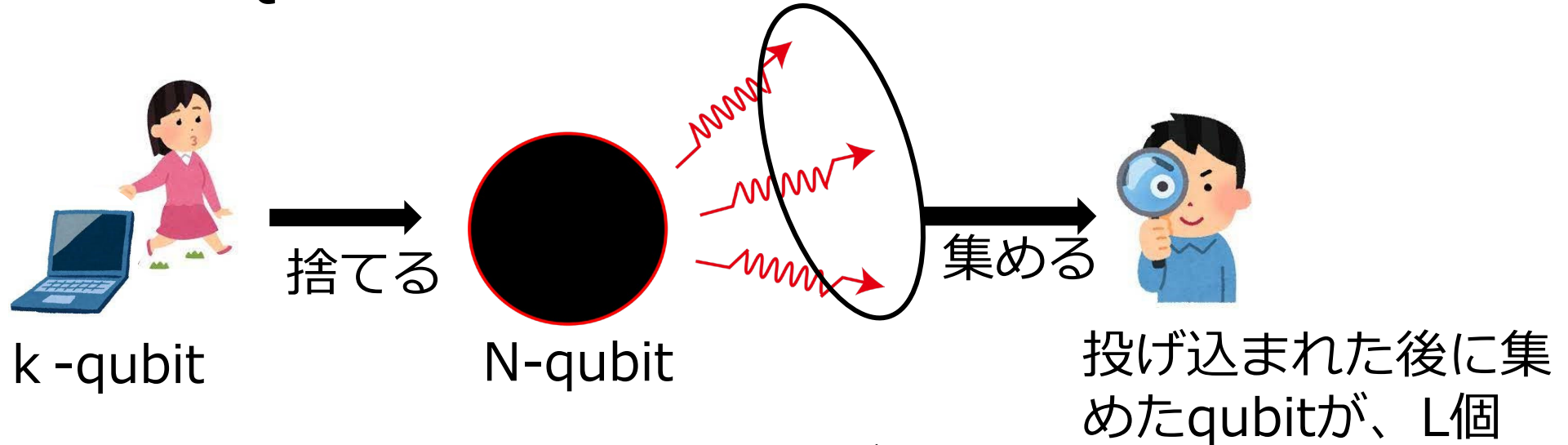
結果:

$$\delta_Q \leq \text{const.} \times 2^{-(l-k)}$$

つまり、ボブは投げ込まれた物体の持つqubitよりほんの少し多くホーキング輻射を集めるだけで、ほぼ情報を完全に回復できる

➡ブラックホールは「情報的な鏡」である！

SIQ定理のブラックホール物理への応用



HaydenとPreskillの解析は、しかし、エネルギー保存則を仮定していない
エネルギー保存則を仮定した場合、上記の結論はどう変わるのか？
いくつかの先行研究において、保存則の下ではブラックホールからの情報回復に遅れが生じるのではないか、という提案がなされた

B. Yoshida, Phys. Rev. D **100**, 086001 (2019), J. Liu, Phys. Rev. Research **2**, 043164 (2020).

特に下記研究では、情報回復エラーのlowerおよびupper boundが求められている

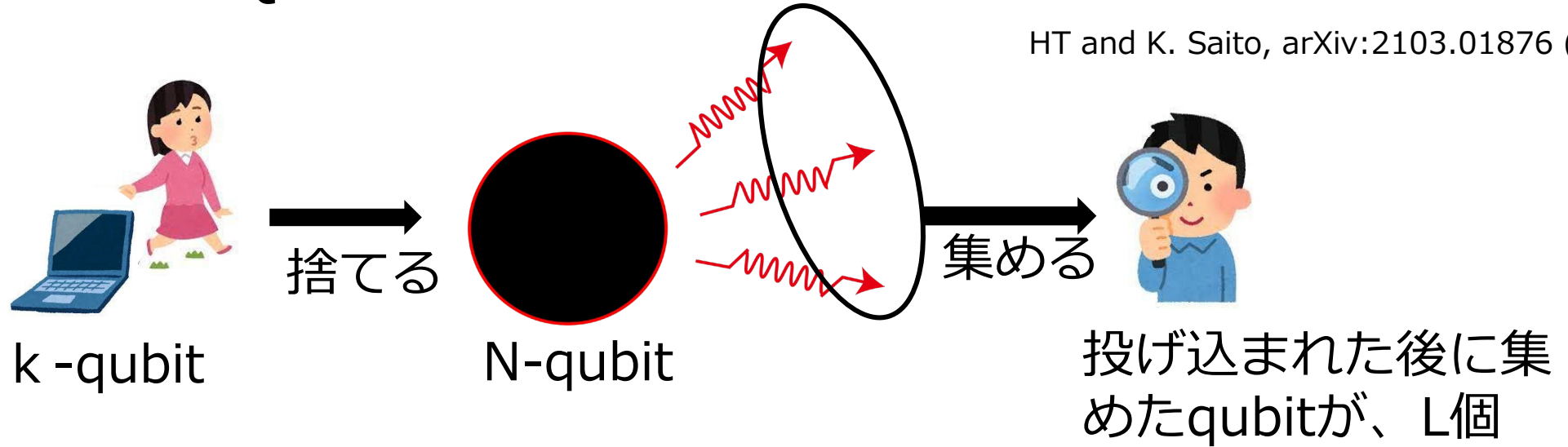
Y. Nakata, E. Wakakuwa, M. Koashi, arXiv:2007.00895 (2020)

しかし、先行研究のlower boundはいくつかのextraな仮定と近似を必要とする

我々の結果からは、こうした仮定のない厳密なlower boundを求めることができる。

SIQ定理のブラックホール物理への応用

HT and K. Saito, arXiv:2103.01876 (2021)



仮定：

- ・ブラックホール、コンピュータ、ホーキング輻射は全てqubitの集合体とみなせる
 - ・ブラックホールのダイナミクスはエネルギー保存則を満たす、「十分に緩和が早い」ダイナミクスである
- この仮定は、Haar random+保存則の時は自動的に満たされる

結果：

$$\frac{\text{const.}}{1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma}}} \leq \delta_Q$$

ただし γ は、 $\gamma = 1 - \frac{l}{N+k}$
= ブラックホールの残存割合

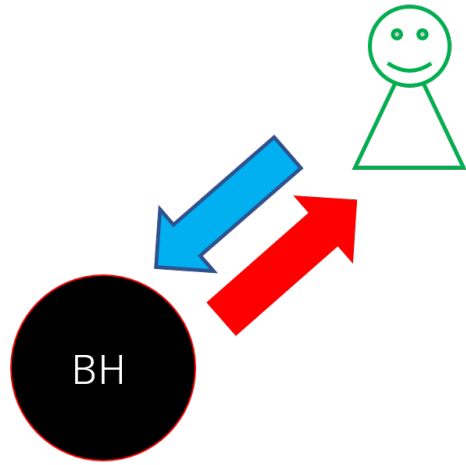
つまり、ブラックホールからの情報脱出は、ブラックホールがどの程度蒸発したかだけに依存するエラーから逃れられない

情報回復速度の比較

HT and K. Saito, arXiv:2103.01876 (2021)

我々の結果は、保存則を仮定した場合とそうでない場合で、ブラックホールからの情報脱出のスピードが全く変わることを示している：

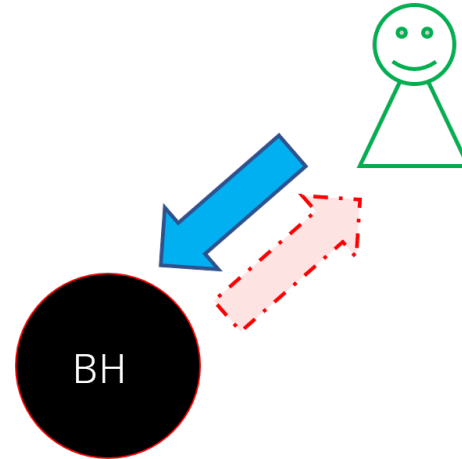
Case without symmetry



Black hole reflects all of the thrown quantum information.

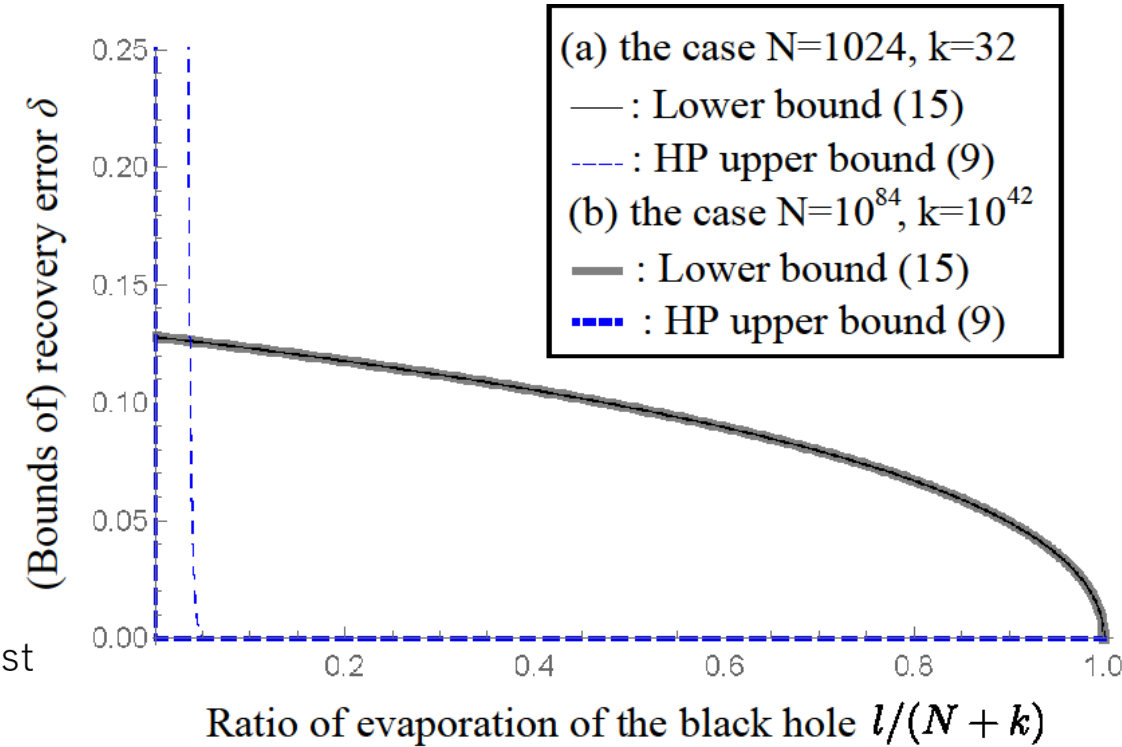
$$\delta_Q \leq \text{const.} \times 2^{-(l-k)}$$

Case with symmetry



Black hole reflects only a part of the thrown quantum information. The rest cannot escape from the black hole.

$$\frac{\text{const.}}{1 + \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\gamma}}} \leq \delta_Q$$



古典情報脱出に対する制限

HT, R. Takagi, Y. Kuramochi arXiv:2206.11086 (2022)

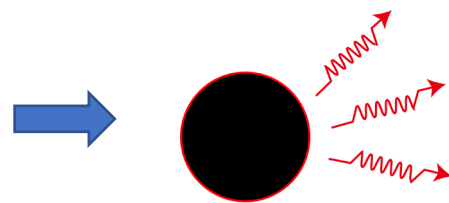
エネルギー保存のあるブラックホールに m ビットの古典情報を投げ込むとき、何ビットが回復不能になるかも評価できる

$$\delta_H \geq \frac{m}{4} \left(1 + \frac{3}{a\gamma} \right)^2$$

$$\gamma = 1 - \frac{l}{N+k}$$

= ブラックホールの残存割合

Classical m bits
011100011010...0011101101



大体 $m/4$ ビットが、ブラックホールがほぼ蒸発するまで回復不能になる

0*11*001*010...*0*11011*1